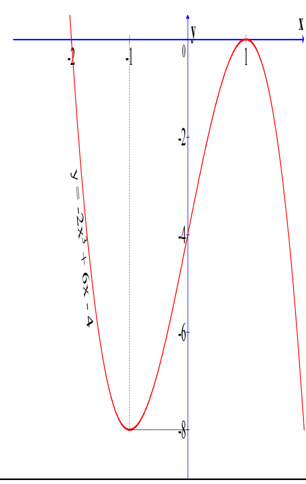
ĐÁP ÁN TOÁN KHỐI A

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>I.1.(1đ)</td><td>Tập xác định: $\mathbb{R}$.
Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x) = -6x^2 + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$
$f(-1) = -9; f(1) = 3.$
Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>|</td><td>$+$</td><td>|</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>-8</td><td>↗</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
<u>Nhận xét</u>: Hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$; đạt cực tiểu tại -1, cực đại tại 1 và $f_{CT} = -8; f_{CD} = 0.$
Giao điểm với trục tung: (0;-4); với trục hoành: (-2;0) và (1;0) (điểm cực đại).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Đồ thị như hình vẽ.



</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>I.2.(1đ)</td><td>Ta có $(x\ln x)' = 1 + \ln x$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ a $(a > 0)$ là $y = (1+\ln a)(x-a) + a\ln a$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Để tiếp tuyến đi qua A, phải có
$$2 = (1+\ln a)(1-a) + a\ln a \Leftrightarrow$$
$$2 = 1 - a + \ln a \Leftrightarrow \ln a - a - 1 = 0, (1).$$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Số tiếp tuyến đi qua A phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(a) = \ln a - a - 1$. Ta có:

$$f'(a) = \frac{1}{a} - 1;$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Bảng biến thiên của $f(a)$:

a	0		1		$+\infty$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng này ta thấy giá trị lớn nhất của $f(a)$ là -2 nên phương trình (1) vô nghiệm. Vậy **không có tiếp tuyến nào đi qua** A.

0,5

II.1.(1đ)

Vế trái có nghĩa khi và chỉ khi $x > 0$. Khi đó vế phải cũng có nghĩa. Dễ thấy vế phải đơn giản bằng x. — 0,25

Như vậy ta có phương trình

$$x^{\ln^2 x - 5\ln x + 7} = x \Leftrightarrow$$

$$x^{\ln^2 x - 5\ln x + 6} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0, (1) \end{array}\right.$$

0,5

Mặt khác: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 2 \\ \ln x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e^2 \\ x = e^3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = e^2, x_3 = e^3$.

0,25

II.2.(1đ)

Ta có:

$$\cos 12^o + \cos 18^o - 4\cos 15^o \cos 21^o \cos 24^o =$$

$$\cos 12^o + \cos 18^o - 2(\cos 36^o + \cos 6^o)\cos 24^o =$$

$$\cos 12^o + \cos 18^o - 2\cos 36^o \cos 24^o - 2\cos 24^o \cos 6^o =$$

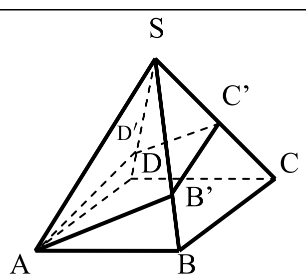
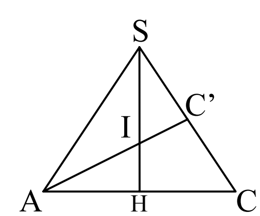
$$\cos 12^o + \cos 18^o - \cos 60^0 - \cos 12^o - \cos 30^0 - \cos 18^o$$

$$= -\cos 60^o - \cos 30^o = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

1,0

III(1đ)

Giả sử 3 điểm trên parabol là $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2), (a < b)$. Hệ số góc của đường thẳng AB là $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$, còn hệ số góc của tiếp

	tuyến tại *C* hiển nhiên là 2*c*. Vậy $c=\dfrac{a+b}{2}$. Độ dài $AB=\sqrt{(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2}=(b-a)\sqrt{1+(a+b)^2}$. Phương trình đường thẳng *AB*: $\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{y-a^2}{b^2-a^2}\Leftrightarrow(a+b)(x-a)=y-a^2$ $\Leftrightarrow(a+b)x-y-ab=0\Leftrightarrow y=(a+b)x-ab.$ Khoảng cách từ *C* đến *AB*: $h=\dfrac{\left\|(a+b)\dfrac{a+b}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-ab\right\|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=\dfrac{\left\|\dfrac{(a+b)^2}{4}-ab\right\|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=\dfrac{(b-a)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}.$ Diện tích tam giác *ABC*: $S=\dfrac{1}{2}AB.h=\dfrac{1}{2}(b-a)\sqrt{1+(a+b)^2}.\dfrac{(b-a)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}=\dfrac{(b-a)^3}{8}.$	0,5
	Diện tích giới hạn bởi parabol và đường thẳng *AB*: $S'=\int_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)dx=\left.\left((a+b)\dfrac{x^2}{2}-abx-\dfrac{x^3}{3}\right)\right\|_a^b$ $=(a+b)\dfrac{b^2-a^2}{2}-ab(b-a)-\dfrac{b^3-a^3}{3}=$ $\dfrac{b-a}{6}\left(3(a+b)^2-6ab-2\left(a^2+ab+b^2\right)\right)=\dfrac{(b-a)^3}{6}.$ Suy ra: $\boxed{\dfrac{S}{S'}=\dfrac{3}{4}}.$	0,5
IV(1đ)	  (*Hình này có thể không vẽ*)	0,25

	Xét tam giác cân *SAC* (cân tại *S*) với *H* là trung điểm của *AC*. Rõ ràng *SH* là đường cao của tam giác *SAC* và của cả hình chóp. Lại có $AC' \perp SC$ và *C'* là trung điểm *SC* nên *AC* = *SC*, tức là tam giác *SAC* là đều.	0,25
	Dễ thấy $\frac{SB'}{B'B} = \frac{SI}{IH}$, trong đó *I* là giao điểm giữa *SH* và *AC'*. Vì I cũng là trọng tâm tam giác *SAC* nên SI : IH = 2:1. **Vậy tỉ số giữa** SB' **và** B'B **là 2**.	0,5
V(1đ)	Ta có $$A = \frac{xy^2\left(\sqrt{x^2+12y^2}-x\right)}{\left(x^2+3y^2\right)12y^2} = \frac{x\left(\sqrt{x^2+12y^2}-x\right)}{12\left(x^2+3y^2\right)}$$ $$= \frac{\sqrt{1+\frac{12y^2}{x^2}}-1}{12\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)}.$$	0,25
	Đặt $\frac{12y^2}{x^2} = t, (t \geq 0)$ và $3A = f(t)$. Khi đó $$f(t) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{t+4};$$ $$f'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}(t+4) - \sqrt{1+t} + 1}{(t+4)^2}$$ $$= \frac{t+4-2-2t+2\sqrt{1+t}}{2(t+4)^2\sqrt{1+t}} = \frac{2-t+2\sqrt{1+t}}{2(t+4)^2\sqrt{1+t}};$$ $$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+t} = t-2 \Leftrightarrow$$ $$\begin{cases} t \geq 2, (1) \\ 4+4t = t^2-4t+4, (2) \end{cases}$$ $$(2) \Leftrightarrow t^2 - 8t = 0 \Rightarrow t = 8.$$	0,5
	Dễ thấy bên trái điểm *t* = 8 thì *f'*(*t*) > 0 và bên phải thì *t* < 0. Ngoài ra $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Do đó, ta có bảng biến thiên sau: $$\begin{array}{c\|ccccc} t & 0 & & 8 & & +\infty \\ \hline f'(t) & & + & 0 & - & \\ \hline f(t) & 0 & \nearrow & 1/6 & \searrow & 0 \end{array}$$	0,25

	Từ bảng này ta thấy tập hợp giá trị của $f(t)$ là $[0;1/6]$ nên **tập hợp mọi giá trị của A là** $\left[0;\frac{1}{18}\right]$. <u>CHÚ Ý.</u> Thí sinh có thể dùng bất đẳng thức để chỉ ra giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tương ứng bằng 0 và 1/18 rồi kết luận rằng tập hợp mọi giá trị của A là $\left[0;\frac{1}{18}\right]$. **Cách làm này không thật chặt chẽ vì không chỉ ra được rằng A nhận mọi giá trị giữa 0 và 1/18 nên chỉ cho tổng cộng 0,75đ.**	
	Phần riêng theo chương trình Chuẩn	
VIa.1(1đ)	Đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 3t-1, \\ y = 2t-3. \end{cases}$ Trung điểm I của cạnh AB là giao điểm của AB với đường trung trực nên có giá trị tham số t thoả mãn phương trình $3(3t-1)+2(2t-3)-4=0 \Leftrightarrow$ $13t-13=0 \Rightarrow t=1.$ -- Vậy ta có $I(2;-1)$. Dễ thấy điểm B ứng với giá trị $t=2$ nên có $\boxed{B(5;1)}$. Tiếp theo, $\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IM}=3.(2;-1)=(6;-3)$ nên có $\boxed{C(8;-4)}$.	0,5 0,5
VIa.2(1đ)	Tâm I của mỗi mặt cầu như vậy phải nằm trên mặt phẳng R đi qua chính giữa hai mặt phẳng đã cho. Dễ thấy hai toạ độ của I phải thoả mãn phương trình mặt phẳng R: $x+2y+1=0.$ Mặt khác, vì khoảng cách từ I đến O bằng bán kính nên phải bằng nửa khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho hay bằng khoảng cách giữa P và R. Lấy một điểm bất kỳ trên P và tính khoảng cách tới R, ta được giá trị bằng $\frac{5}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$. -- Như vậy, chính I phải nằm trên mặt cầu S, tâm O, bán kính $\sqrt{5}$, tức là các toạ độ thoả mãn phương trình: $x^2+y^2+z^2=5.$ Như vậy, tập hợp tâm các mặt cầu đi qua O và tiếp xúc với hai mặt phẳng đã cho là đường tròn giao tuyến của mặt cầu S và mặt phẳng R. Nói cách khác, đó **là tập hợp các điểm có ba toạ độ *x, y, z* thoả mãn hệ phương trình**: $\begin{cases} x+2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2=5. \end{cases}$	0,5 0,5
VIIa(1đ)	Số cách lấy 6 trong 12 viên là C_{12}^6 (tức là $A=C_{12}^6$). Lấy 6 viên sao cho số viên đỏ bằng số viên xanh có hai trường hợp: hoặc 3 viên đỏ, 3	0,5

	viên xanh (không viên nào trắng) hoặc 2 viên trắng, 2 đỏ và 2 xanh. -- Trường hợp thứ nhất có thể thực hiện theo $C_4^3C_5^3$ cách; trường hợp thứ hai: $C_3^2C_4^2C_5^2$ cách. Như vậy $B = C_4^3C_5^3 + C_3^2C_4^2C_5^2$; do đó $$\frac{B}{A} = \frac{C_4^3C_5^3 + C_3^2C_4^2C_5^2}{C_{12}^6} = \frac{4.10+3.6.10}{924} = \frac{5}{21}.$$	0,5
	Phần riêng theo chương trình Nâng cao	
VIb.1(1đ)	Rút *y* từ phương trình của d_1 rồi thế vào phương trình của d_2, ta được: $$\left(1-k^2\right)x + 2k\left(kx+k\right) - 1 - k^2 = 0 \Leftrightarrow$$ $$\left(1+k^2\right)x + k^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$ Do đó $y = \frac{k-k^3}{1+k^2} + k = \frac{2k}{1+k^2}$.	0,5
	-- Suy ra: $$x^2+y^2 = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2 =$$ $$\frac{1-2k^2+k^4+4k^2}{\left(1+k^2\right)^2} = \frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1+k^2\right)^2} = 1.$$ Vậy **giao điểm của hai đường thẳng di chuyển trên đường tròn tâm** *O*, **bán kính bằng** 1.	0,5
VIb.2(1đ)	Giả sử *S* có phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Do *S* đi qua *A, B, C, D* nên có: $$\begin{cases} 1-2c+d=0 \\ 1-2a+d=0 \\ 3-2a-2b-2c+d=0 \\ 1-2b+d=0. \end{cases}$$ Suy ra $a = b = c = ½$ và $d = 0$. Vậy mặt cầu *S* có phương trình: $$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$$ (tâm là *I*(½, ½, ½), bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).	0,25
	-- Tiếp theo, giả sử *S'* có phương trình $x^2+y^2+z^2-2a'x-2b'y-2c'z+d'=0$. Do *S'* đi qua *A', B', C',*	

	D' nên có: $\begin{cases} \frac{1}{4} - a' + d' = 0 \\ \frac{1}{2} - b' - c' + d' = 0 \\ 2 - 2a' - 2b' + d' = 0 \\ 2 - 2b' - 2c' + d' = 0. \end{cases}$ Suy ra $a' = c' = \frac{5}{4}, b' = \frac{1}{4}'d' = 1$. Vậy mặt cầu *S'* có phương trình: $$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z + 1 = 0.$$ (tâm là *I'*(5/4, 1/4, 5/4), bán kính $R' = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{1}{16} + \frac{25}{16} - 1}$.	0,25
	Phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến: $$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 3z - 2 = 0.$$ Khoảng cách từ I tới mặt phẳng này: $$\frac{\left\| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \right\|}{\sqrt{9+1+9}} = \frac{1}{2\sqrt{19}}.$$ **Bán kính đường tròn giao tuyến**: $$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{76}} = \sqrt{\frac{56}{76}} = \sqrt{\frac{14}{19}}.$$	0,5
VIIb(1đ)	Giả sử căn bậc hai của 15 + 112i là *x* + *yi*. Khi đó: $$(x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 15 + 112i \Leftrightarrow$$ $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 56 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{3136}{x^2} = 15, (x \neq 0) \Rightarrow$$ $$x^4 - 15x^2 - 3136 = 0.(1)$$	0,5
	Đặt $x^2 = t, (t \geq 0)$, thì (1) trở thành: $$t^2 - 15t - 3136 = 0;$$ $$\Delta = 225 + 12544 = 12769 = 113^2;$$ $$t = \frac{15 + 113}{2} = 64.$$ Suy ra $x = \pm 8, y = \pm 7.$ Vậy **căn bậc hai của** 15 + 112i **có hai giá trị là** $\pm(8 + 7i)$.	0,5