LÃNG MẠN CÙNG MỘT BÀI TOÁN

Trần Thanh Tùng

Trong đề thi vào Đại học môn Toán khối A năm 2009 thì có thể nói câu V là câu khó nhất. Không một học sinh nào của trường THPT Mộc Hóa giải được trong khi thi. Thật sự nó khó lắm chăng? Nó cứ thôi thúc tôi, buộc tôi phải lang thang trên internet xem thiên hạ giải nó như thế nào và tôi cùng cậu học trò là em Đạt cũng đã tìm ra vài cách giải cho riêng mình.
Xin giới thiệu lại bài toán và các cách giải của nó.
“ Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa $x(x+y+z)=3yz$ ta có: $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3$ (*) ”.
Trước khi đi tìm lời giải cho bài bất đẳng thức này, tôi có nhân xét:

▪ Đây không phải là một bất đẳng thức đối xứng theo các biến nên đa số học sinh chưa có thói quen giải nó. Các bất đẳng thức trong các kì tuyển sinh trước thường là bất đẳng thức đối xứng.

▪ Vế phải có ba biến và vế trái có hai biến và đồng bậc nên trong suy nghĩ tìm lời giải là ta phải giảm biến x trong vế trái và buộc vế trái xuất hiện $(y+z)$, nhưng nếu làm theo như vầy thì ta chỉ thu được đẳng thức. May mắn cho ta là có một bất đẳng thức quen thuộc là $(y+z)^2\ge 4yz$ và các dạng biến thể của nó nên việc tìm lời giải cho bất đẳng thức sẽ xoay quanh phát hiện này.

<u>Cách giải 1</u> (của phó giáo sư Phan Huy Khải)

Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y \to x=\dfrac{b+c-a}{2}, y=\dfrac{a+c-b}{2}, z=\dfrac{b+a-c}{2}$.
Từ điều kiện bài toán ta suy ra: $4a^2=(b+c)^2+3(b-c)^2 \to a^2=b^2-bc+c^2$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
$5a^3\ge b^3+c^3+3abc \leftrightarrow 5a^2\ge a(b+c)+3bc(**)$
Từ $a^2=b^2-bc+c^2$ suy ra:

$$\begin{cases} a^2\ge bc \\ 2a^2=2(b^2+c^2)-2bc\ge b^2+c^2\ge \dfrac{(b+c)^2}{2} \to 2a\ge b+c \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2a^2\ge a(b+c) \\ 3a^2\ge 3bc \end{cases} \to (**) \text{ đúng} \to (*) \text{ đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.
Thiên hạ cho rằng cách giải này gọn đẹp nhất!

***Cách giải 2* (của tiến sĩ Lê Thống Nhất)**

Từ giả thiết bài toán ta có: $x^2+xy+xz=3yz \leftrightarrow (x+y)(x+z)=4yz$.

Đặt $a=x+y, b=y+z$ thì $ab=4yz$.

Ta có hằng đẳng thức:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\le\sqrt{2(a^2+b^2)}\left[(a-b)^2+ab\right]=$$

$$=\sqrt{2\left[(a-b)^2+2ab\right]}\left[(a-b)^2+ab\right]=\sqrt{2\left[(y-z)^2+8yz\right]}\left[(y-z)^2+4yz\right]$$

$$=\sqrt{2\left[(y+z)^2+4yz\right]}(y+z)^2\le\sqrt{4(y+z)^2}(y+z)^2=2(y+z)^2$$

Tức là:

$(x+y)^3+(x+z)^3\le 2(y+z)^2$ (1).

Mặt khác ta lại có:

$3(x+y)(x+z)(y+z)=12yz(y+z)\le 3(y+z)^2(y+z)=3(y+z)^2$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được kết quả cần chứng minh.

***Cách giải 3* (của thầy Nguyễn Anh Dũng ĐHSP Hà Nội)**

Đặt $t=y+z$. Từ giả thiết suy ra : $yz=\dfrac{x^2+xt}{3}$.

Vì $yz\le\dfrac{(y+z)^2}{4}$ nên $x(x+y+z)=3yz\le\dfrac{3}{4}(y+z)^2$

$\to x^2+tx\le\dfrac{3}{4}t^2\to(2x+t)^2\le 4t^2\to 2x\le t$.

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$(2x+y+z)^3-3(x+y)(x+z)(2x+y+z)+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3$$

$$\leftrightarrow(2x+y+z)^3-3(x+y)(x+z).2x\le 5(y+z)^3$$

$$\leftrightarrow(2x+y+z)^3-6x\left(x^2+x(y+z)+yz\right)\le 5(y+z)^3$$

$$\leftrightarrow(2x+t)^3-6x\left(x^2+xt+\frac{x^2+xt}{3}\right)\le 5t^3$$

$$\leftrightarrow 2t\left(2x^2+3xt-2t^2\right)\le 0$$

$$\leftrightarrow 2x^2+3xt-2t^2\le 0$$

Vì $0<x\le\dfrac{t}{2}$ nên $2x^2+3xt\le\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{3}{2}t^2=2t^2$ hay $2x^2+3xt-2t^2\le 0$.

Bất đẳng thức cũng đã được chứng minh.

Đây cũng là cách giải trên báo tuổi trẻ.

***Cách giải 4** (của bạn Võ Bá Quốc Cẩn sinh viên ĐH Y Cần Thơ khóa 2006-2012)*

Từ giả thiết ta có : $(x+y)(x+z)=4yz$. Hơn nữa áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được : $3yz=x(x+y+z)\geq 3x\sqrt[3]{xyz}\to x\leq \sqrt{yz}$.

Sử dụng hằng đẳng thức :

$$(x+y)^3+(x+z)^3=(x+y)(x+z)(2x+y+z)+(y-z)^2(2x+y+z)\leq$$

$$\leq 4yz\left(2\sqrt{yz}+y+z\right)+(y-z)^2\left(2\sqrt{yz}+y+z\right)$$

$$=(y+z)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\leq 2(y+z)^3$$

Mặt khác ta lại có:

$$3(x+y)(x+z)(y+z)=12yz(y+z)\leq 3(y+z)^2(y+z)=3(y+z)^2.$$

Cả hai điều trên ta suy ra :

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\leq 5(y+z)^3.$$

Cách giải của bạn Cẩn và của thầy Nhất có phần tương tự nhau!

***Cách giải 4** (của tanpham90 diễn đàn toán học.net)*

Bất đẳng thức tương đương với:

$$x^3+3x^2(y+z)+3x\left[(y+z)^2-2yz\right]+3xyz\leq 2(y+z)^3$$

$$\leftrightarrow x^3+3x^2(y+z)+3x\left[(y+z)^2-\frac{2}{3}x(x+y+z)\right]+3xyz\leq 2(y+z)^3$$

Đặt $y+z=2a$.Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^3+6x^2a+3x\left[4a^2-\frac{2}{3}x(x+2a)\right]+x^2(x+2a)\leq 16a^3$$

$$\leftrightarrow 4(x-a)(x+4a)a\leq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì ngược lại nếu $x>a\leftrightarrow x>\dfrac{y+z}{2}$. Theo điều kiện ban đầu ta suy ra: $(y+z)^2<4yz$ vô lí!

***Cách giải 5** (đáp án của BGD)*

Các bạn tự tìm lấy!

Không biết các bạn cảm thấy như thế nào? Riêng tôi, tôi cảm thấy nát óc khi theo những dòng trong lời giải trên. Mỗi một dòng là một phần toán học.

Mời các bạn theo dõi lời giải của thầy trò chúng tôi.

<u>Cách giải 6</u>

Ta có:

$$3yz = x(x+y+z) \geq 3x\sqrt[3]{xyz} \to x \leq \sqrt{yz} \to x^2 \leq yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2$$

$$\to 2x \leq y+z.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y^2+z^2+yz) \leq 2(y+z)^3 \ (**).$$

$$VT_{(**)} \leq \frac{1}{8}(y+z)^3 + 3yz(y+z) + \frac{3}{2}(y+z)\left[(y+z)^2 - yz\right] =$$

$$= \frac{13}{8}(y+z)^3 + \frac{3}{2}yz(y+z) \leq 2(y+z)^3.$$

<u>Cách giải 7</u>

Gọi a,b,c là ba số thực dương có tổng bằng 3. Thế thì tồn tại một số thực dương t sao cho : $x = ta, y = tb, z = tc$.

Từ điều kiện bài toán suy ra : $a = bc$.

Bất đẳng thức (*) tương đương :

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c) \leq 5(b+c)^3$$

$$\leftrightarrow (2a+b+c)^3 - 6a(a+b)(a+c) \leq 5(b+c)^3$$

$$\leftrightarrow (a+3)^3 - 24a^2 \leq 5(3-a)^3$$

$$\leftrightarrow (1-a)(6-a) \geq 0$$

Ta có : $b + c \geq 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{a} \to a = 3 - (b+c) \leq 3 - 2\sqrt{a} \to a \leq 1.$

Vậy : $(1-a)(6-a) \geq 0$ đúng.

<u>Cách giải 8</u>

Đặt $x = \dfrac{a+b-c}{2}, y = \dfrac{a+c-b}{2}, z = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Từ điều kiện bài toán ta suy ra :

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \overset{AM-GM}{\geq} \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} \to c^2 \geq ab.$$

Bất đẳng thức (*) tương đương :

$a^3+b^3+3abc\le 5c^3 \leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-ab)+3abc\le 5c^3$

$\leftrightarrow (a+b)c^2+3abc\le 5c^3$ đúng. Đố bạn tại sao !

Cách giải 9

Đây là cách giải sáng tạo và không kém phần " lều lĩnh" !

Gọi a, b, c là ba cạnh của một tam giác ABC.

Đặt $x=\dfrac{a+b-c}{2}, y=\dfrac{a+c-b}{2}, z=\dfrac{b+c-a}{2}$. Điều này bao giờ cũng thỏa.

Từ điều kiện bài toán ta suy ra :

$c^2=a^2+b^2-ab \to \widehat{C}=60^0$ (kinh nghiệm đầy mình !).

Theo định lý hàm sin thì :

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương :

$\sin^3 A+\sin^3 B+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin A.\sin B\le \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$ (**).

$$VT_{(**)}=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B)-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin A\sin B$$

$$=\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\cos\frac{3(A-B)}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\cos(A-B)+\frac{1}{2}\right]$$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos(A-B)\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\le\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$ đpcm. Ăn thua mình lều !

Cách giải 10

Đặt $a=\dfrac{x+y}{y+z}$ và $b=\dfrac{x+y}{y+z}$. Bất đẳng thức (*) $\leftrightarrow a^3+b^3+3ab\le 5$.

Ta có :

$$a.b=\frac{x(x+y+z)+yz}{(y+z)^2}=\frac{2x(x+y+z)-2yz}{(y+z)^2}$$

$$\to ab+1=\frac{(x+y)^2+(x+z)^2}{(y+z)^2}=a^2+b^2\to a^3+b^3=a+b.$$

Vậy (*) $\leftrightarrow a+b+3ab\le 5$.

Ta thấy :

$$\frac{(a+b)^2}{2} \le a^2+b^2 = 1+ab \le 1+\frac{1}{4}(a+b)^2 \to a+b \le 2$$

Mà $a+b+3ab \le a+b+\frac{3}{4}(a+b)^2 \le 5$ đpcm.

Cũng hơi mệt mỏi khi tìm lời giải và gõ vi tính. Nhưng lỡ yêu BĐT rồi nên phải chịu. Tiếp tục hai cách còn lại.

<u>Cách giải 11</u>

Đặt $y = ax, z = by$. Hiển nhiên $a > 0, b > 0$.

Từ điều kiện dễ dàng suy ra :

$a+b+1 = 3ab \leftrightarrow 3ab = a+b+1 \ge 1+2\sqrt{ab} \to ab \ge 1$.

Bất đẳng thức (*)

$\leftrightarrow (a+1)^3 + (b+1)^3 + 3(a+1)(b+1)(a+b) \le 5(a+b)^3$

$\leftrightarrow (a+b+2)^3 - 6(a+1)(b+1) \le 5(a+b)^3$

$\leftrightarrow (3ab+1)^3 - 24ab \le 5(3ab-1)^3$

$\leftrightarrow 27(ab)^2 - 12ab + 1 \le 2(3ab-1)^3$

$\leftrightarrow (3ab-1)(9ab-1) \le 2(3ab-1)^3$

$\leftrightarrow 7ab \le 6(ab)^2 + 1$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $ab \ge 1$.

<u>Cách giải 12</u>

Có người bảo đạo hàm là một công cụ mạnh để giải toán BĐT. Ngay cả mấy cậu học sinh lớp 8,9 cũng đòi học đạo hàm vì thấy các anh chị dùng nó tuyệt vời quá. Nhưng dục tốc thì bất đạt! Mới các bạn xem chúng tôi tung chiêu sau cùng là sử dụng "hàng nóng" là đạo hàm.

Từ điều kiện suy ra:

$9x^2(x+y+z) = 27xyz \le (x+y+z)^3 \to 2x \le y+z$.

- Nếu $\begin{cases} x \le y \\ x \le z \end{cases}$ thì (*) hiển nhiên đúng.
- Do vai trò của y và z như nhau nên ta có thể cho rằng: $z \le x \le y$.

Thế thì bao giờ ta cũng tìm được hai số không âm a,b sao cho $a \ge b$ và: $\begin{cases} y = x+a \\ x = z+b \end{cases}$.

Điều kiện tương đương: $2x(a-b)=3ab$.
Trường hợp $a=b$ là tầm thường. Bây giờ ta chỉ xét $a>b$.
Khi đó :

$$(*)\leftrightarrow (2x+a)^3+(2x-b)^3+3(2x+a)(2x-b)(2x+a-b)\le 5(2x+a-b).$$

Đặt $t=2x+a-b>2x\to x<\frac{t}{2}$.

$$(*)\leftrightarrow (2x+t)^3-6x\left(4x^2+2ab\right)\le 5t^3$$
$$\leftrightarrow 8x^3-6tx^2-3t^2x+2t^3+12abx\ge 0$$
.

Bây giờ ta chứng minh :
$f(x)=8x^3-6tx^2-3t^2x+2t^3>0$.

Thật vậy : $f'(x)=3\left(8x^2-4tx-t^2\right)=0\leftrightarrow x=\frac{t\pm\sqrt{3}t}{4}$. Lập bảng biến thiên của hàm số f trên $\left(0;\frac{t}{2}\right)$ thì thấy $f(x)>f\left(\frac{t}{2}\right)=0,\forall x\in\left(0;\frac{t}{2}\right)$.
Từ đây ta có điều phải chứng minh.
Vài điều chia sẻ cùng đồng nghiệp.

"Thành công không phải là số chiến thắng bạn có được mà là những ngọn núi bạn đã vượt qua" (*Booker Taliaferro Washington*)

Mộc Hóa tháng 8 năm 2009.
Trần Thanh Tùng