KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP **Môn thi: TOÁN − Giáo dục trung học phổ thông**

Đề số 17 *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề*

------------------------------ --

I. PHẦN CHUNG DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (3,0 điểm): Cho hàm số: $y = \frac{x^2(x - 3)}{2}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

3) Tìm điều kiện của k để phương trình sau đây có nghiệm duy nhất: $x^3 - 3x^2 - k = 0$.

Câu II (3,0 điểm):

1) Giải phương trình: $\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2 + 6x - 6} = 2.4^{x+1}$

2) Tính tích phân: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

3) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = x^5 - x^4 - 3x^3 + 9$ trên đoạn $[-2;1]$

Câu III (1,0 điểm):

Cho khối chóp *S.ABC* có *ABC* và *SBC* là các tam giác đều có cạnh bằng 2, $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo *a*.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) *Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần dưới đây*

1. <u>Theo chương trình chuẩn</u>

Câu IVa (2,0 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho tam giác *ABC* có toạ độ các đỉnh:

$A(-1;1;2)$, $B(0;1;1)$ và $C(1;0;4)$.

1) Chứng minh *ABC* là tam giác vuông. Xác định toạ độ điểm *D* để bốn điểm *A,B,C,D* là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

2) Gọi *M* là điểm thoả $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua điểm *M* và vuông góc với đường thẳng *BC*. Viết phương trình mặt cầu tâm *A*, tiếp xúc với mp(*P*).

Câu Va (1,0 điểm): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây:

$$y = x(x - 1)^2, y = x^2 + x \text{ và } x = -1$$

2. <u>Theo chương trình nâng cao</u>

Câu IVb (2,0 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

1) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d. Viết phương trình mặt cầu tâm M, tiếp xúc với d.

2) Viết phương trình mp(P) đi qua điểm M, song song với d và cách d một khoảng bằng 4.

Câu Vb (1,0 điểm): Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Hãy viết dạng lượng giác của số phức z^5.

---------- Hết ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ ký của giám thị 1: .... Chữ ký của giám thị 2: ....

BÀI GIẢI CHI TIẾT

Câu I:

❶ Hàm số: $y = \dfrac{x^2(x-3)}{2} = \dfrac{x^3-3x^2}{2}$

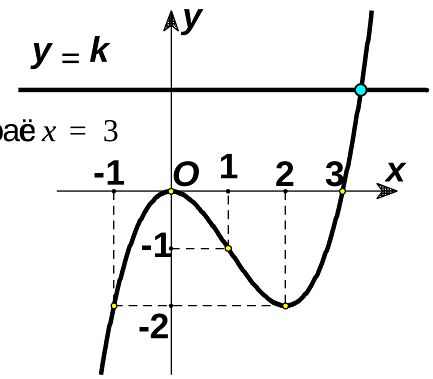
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{3x^2-6x}{2}$
- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Hàm số ĐB trên các khoảng $(-\infty;0), (2;+\infty)$, NB trên khoảng $(0;2)$
  Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 0$ tại $x_{CĐ} = 0$
  đạt cực tiểu $y_{CT} = -2$ tại $x_{CT} = 2$.
- $y'' = 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$. Điểm uốn: $I(1;-1)$
- Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$
  Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	-2	0	-1	-2	0

- Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây



❷ • Giao điểm của (C) với trục hoành: cho $y_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

- Với $x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. Pttt là: $y - 0 = 0(x-0) \Leftrightarrow y = 0$
- Với $x_0 = 3, y_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{9}{2}$. Pttt là: $y - 0 = \dfrac{9}{2}(x-3) \Leftrightarrow y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{27}{2}$

❸ • $x^3 - 3x^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 2k \Leftrightarrow \dfrac{x^3-3x^2}{2} = k$

- Số nghiệm của pt(*) bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = k$
- Dựa vào đồ thị ta thấy, pt(*) có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi: $k > 0$ hoặc $k < -2$

Câu II:

❶ $\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+6x-6} = 2.4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(2x^2+6x-6)} = 2.2^{2(x+1)} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-3} = 2^{2x+3}$

$x^2 + 3x - 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$

- Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = -3$ và $x = 2$

❷ $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2.x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

• Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ và $x^2 = t^2 - 1$

• Đổi cận:

x	0	$\sqrt{3}$
t	1	2

• Vậy, $I = \int_1^2 (t^2-1)dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$

❸• Hàm số $y = x^5 - x^4 - 3x^3 + 9$ liên tục trên đoạn $[-2;1]$

• $y' = 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 = x^2(5x^2 - 4x - 9)$

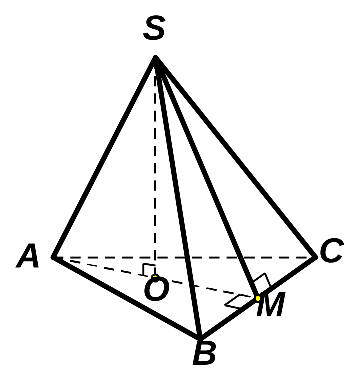
• $y' = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2-4x-9) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = \frac{9}{5}$ **(**chỉ loại nghiệm $x = \frac{9}{5}$**)**

• $f(0) = 9$ **;** $f(-1) = 10$ **;** $f(-2) = -15$ và $f(1) = 6$

• Trong các kết quả trên, số –15 nhỏ nhất, số 10 lớn nhất.

• Vậy, $\min\limits_{[-2;1]} y = -15$ khi $x = -2$, $\max\limits_{[-2;1]} y = 10$ khi $x = -1$

<u>Câu III</u>



• Gọi *M* là trung điểm đoạn *BC*, *O* là trung điểm đoạn *AM*.

• Do ΔABC và ΔSBC đều có cạnh bằng 2*a* nên

$$SM = AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAM \text{ đều } SO \perp AM \ (1)$$

• Ta có, $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp OM \end{cases} \Rightarrow BC \perp SO$ (2)

• Từ (1) và (2) ta suy ra $SO \perp (ABC)$ (do $AM, BC \subset (ABC)$)

• Thể tích khối chóp *S.ABC*

$$V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BC\cdot SO = \frac{1}{6}\cdot a\sqrt{3}\cdot 2a\cdot\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \text{ (đvtt)}$$

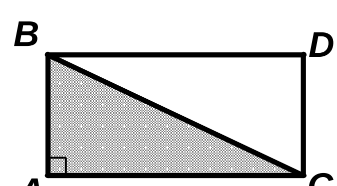
<u>THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN</u>

<u>Câu IVa</u>: *A*(–1;1;2), *B*(0;1;1) và *C*(1;0;4)

❶• $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;0;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (2;-1;2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1.2 + 0.(-1) - 1.2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại *A*.

• Gọi $D(x_D;y_D;z_D) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (x_D - 1; y_D; z_D - 4)$

• Do $AB \perp AC$ nên *A*,*B*,*C*,*D* là bốn đỉnh của hình chữ nhật



khi và chỉ khi tứ giác ***ABDC*** là hình chữ nhật

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_D - 1 \\ 0 = y_D \\ -1 = z_D - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 0 \\ z_D = 3 \end{cases}. \text{ Vậy, } D(2;0;3)$$

❷• Gọi $M(a;b;c)$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{MB} = (-a;1-b;1-c) \\ \overrightarrow{MC} = (1-a;-b;4-c) \end{cases}$

• Vì $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$ nên $\begin{cases} -a = 2(1-a) \\ 1-b = 2(-b) \\ 1-c = 2(4-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 7 \end{cases}$. Vậy, $M(2;-1;7)$

• mp(P) đi qua điểm $M(2;-1;7)$ và vuông góc với BC nên có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1;-1;3)$

• ptmp (P): $1(x-2) - 1(y+1) + 3(z-7) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3z - 24 = 0$

• Mặt cầu tâm $A(-1;1;2)$, tiếp xúc với mp(P) có bán kính

$$R = d(A,(P)) = \frac{|(-1) - 1 + 3.2 - 24|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{11}}$$

• Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \dfrac{400}{11}$

<u>Câu Va</u>: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x(x-1)^2, y = x^2 + x$ và $x = -1$

• Cho $x(x-1)^2 = x^2 + x \Leftrightarrow \text{L} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$

• Diện tích cần tìm là: $S = \int_{-1}^{3} |x^3 - 3x^2| dx = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2) dx \right| + \left| \int_{0}^{3} (x^3 - 3x^2) dx \right|$

$$\Leftrightarrow S = \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \Big|_{-1}^{0} \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \Big|_{0}^{3} \right| = \left| -\frac{5}{4} \right| + \left| -\frac{27}{4} \right| = 8 \ \textbf{(}\text{đvdt}\textbf{)}$$

<u>THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO</u>

<u>Câu IVb</u>:

❶• Gọi M' là hình chiếu của điểm M lên d, thế thì $M' \in d$, do đó toạ độ của điểm M' là:

$$M'(3+2t;-1+t;1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (2+2t;-3+t;4+2t)$$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(3;-1;1)$, có vtcp $\vec{u}_d = (2;1;2)$

• Và ta còn có, $MM' \perp d$ nên $\overrightarrow{MM'}\vec{u}_d = 0$ (trong đó $\vec{u}_d$ là vtcp của d)

$$\Leftrightarrow (2+2t).2 + (-3+t).1 + (4+2t).2 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

• Vậy, toạ độ điểm $M'(1;-2;-1)$ và toạ độ véctơ $\overrightarrow{MM'} = (0;-4;2)$

• Mặt cầu tâm M, tiếp xúc với d có bán kính $R = MM' = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

• Vậy, pt mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 20$

❷• mp(P) qua M, có vtpt $\vec{n} = (a;b;c) \neq \vec{0}$ có pttq: $a(x-1) + b(y-2) + c(z+3) = 0$ (*)

• Vì $(P) \parallel d$ nên $\vec{n}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = -2a - 2c$ **(1)**

• Và khoảng cách từ d đến (P) bằng 4 nên khoảng cách từ A đến (P) cũng bằng 4, do đó

$$d(A,(P)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|2a - 3b + 4c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 \Leftrightarrow |2a - 3b + 4c| = 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \textbf{(2)}$$

• Thay (1) vào (2) ta được:

$$|2a + 6a + 6c + 4c| = 4\sqrt{a^2 + (2a + 2c)^2 + c^2} \Leftrightarrow |4a + 5c| = 2\sqrt{5a^2 + 5c^2 + 8ac}$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 + 25c^2 + 40ac = 20a^2 + 20c^2 + 32ac \Leftrightarrow 4a^2 - 8ac - 5c^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = 5c \Rightarrow b = -7c \\ 2a = -c \Rightarrow b = -c \end{array}\right.$$

• Thay a,b,c (theo c) vào (*) ta được 2 mp: $5x - 14y + 2z + 29 = 0$; $x + 2y - 2z - 11 = 0$

<u>Câu Vb</u>: • Ta có, $z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2.(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})$

• Do đó, $z^5 = 2^5.(\cos\frac{5\pi}{3} + i.\sin\frac{5\pi}{3}) = 32.\left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i.\sin(-\frac{\pi}{3})\right]$