

I - PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ HỌC SINH (7,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm trên (C) có tung độ $y = -3$.
3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và trục tung.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

2. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 1)^4 \cos x dx$

3. Cho tập hợp $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 9 \leq 0\}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên D.

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$, góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC. Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

II - PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Học sinh học chương trình nào thì chỉ được làm phần dành riêng cho chương trình đó (phần 1 hoặc phần 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu 4.a (2.0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$(d_1): \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 5}{4}$, $(d_2): \frac{x - 7}{3} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-2}$ và điểm $A(1; -1; 1)$

1. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau.
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2) . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

Câu 5.a (1.0 điểm) Tìm môđun của số phức $z = \frac{1 + 2i - (1 - i)^3}{1 + i}$

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu 4.b (2.0 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

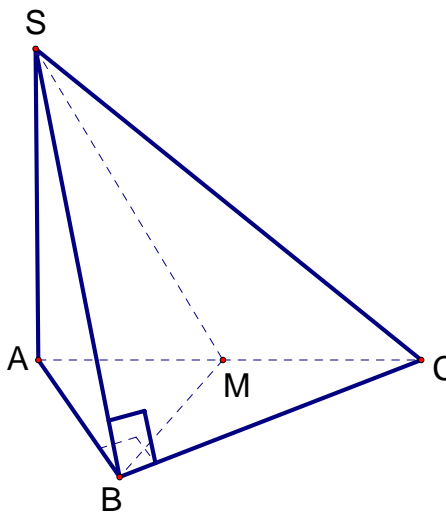
$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 6}{3}$ và $(d_2): \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-1}$

1. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2) . Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) .

Câu 5.b (1.0 điểm) Tính và viết kết quả dưới dạng đại số số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^8$. Hết

Câu	Ý	Nội dung	Điểm												
1	1	<p>Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$</p>	1.5												
		<p>1) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$</p> <p>2) Sự biến thiên của hàm số:</p> <p>a) Giới hạn và tiệm cận:</p> <p>Do $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C)</p> <p>và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C)</p> <p>b) Bảng biến thiên:</p> <p>Ta có: $y' = \frac{-5}{(x - 2)^2} < 0 \quad \forall x \in D$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.</p> <p>3) Đồ thị:</p> <p>Giao điểm với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$. Suy ra (C) cắt Oy tại $(0; -\frac{1}{2})$</p> <p>Giao điểm với Ox: $y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Suy ra (C) cắt Ox tại $(-\frac{1}{2}; 0)$</p>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'		—	—	y	2	$+\infty$	2	0.25 0.25 0.25 0.25
x	$-\infty$	2	$+\infty$												
y'		—	—												
y	2	$+\infty$	2												
	2	<p>Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm trên (C) có tung độ $y = -3$.</p>	0.75												
		<p>$y = -3 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x - 2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x + 1 = -3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$</p> <p>Suy ra: $M(1; -3) \in (C)$.</p>	0.25												

		Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là : $k = y'(1) = \frac{-5}{(1-2)^2} = -5$	0.25
		Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là : $y + 3 = -5(x + 1) \Leftrightarrow y = -5x - 8$	0.25
	3	Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và trục tung.	0.75
		Dựa vào đồ thị (C), suy ra diện tích hình phẳng là: $S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left \frac{2x+1}{x-2} \right dx = - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x+1}{x-2} dx = - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(2 + \frac{5}{x-2} \right) dx$ $= [-2x - 5 \ln x-2]_{-\frac{1}{2}}^0$ $= -5 \ln 2 - \left(1 - 5 \ln \frac{5}{2} \right) = 5 \ln \frac{5}{2} - 5 \ln 2 - 1 = 5 \ln \frac{5}{4} - 1$ Vậy $S = 5 \ln \frac{5}{4} - 1$ đvdt.	0.25 0.25 0.25
2	1	Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$	1.0
		Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7$ Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(7-x)^2$ $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}[(x-1)(x+1)] = \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(7-x)^2\right]$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = \frac{1}{2}(7-x)^2$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 49 - 14x + x^2$ $\Leftrightarrow x^2 + 14x - 51 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -17 \end{cases}$ So điều kiện ban đầu ta suy ra nghiệm của phương trình (1) là $x = 3$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	2	Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 1)^4 \cos x dx$	1.0
		Đặt $t = 2 \sin x + 1 \Rightarrow dt = 2 \cos x dx$ Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$ Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int_1^3 t^4 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^5}{5} \right]_1^3$ $= \frac{242}{10} = \frac{121}{5}$	0.25 0.25 0.25 0.25
	3	Cho tập hợp $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 9 \leq 0\}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên D.	1.0

		$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 9 \leq 0\} = \left[-3; \frac{3}{2}\right]$ $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in D \\ x = 1 \in D \end{cases}$ <p>Do $y(-3) = -15$; $y(-1) = 5$; $y(1) = 1$; $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$</p> <p>nên ta suy ra được: $\max_{x \in D} y = 5$; $\min_{x \in D} y = -15$</p>	0,25
			0,25
			0,25
			0,25
3		Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).	1.0
		 <p>Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{[(SBC); (ABC)]} = 60^\circ$</p> <p>Xét tam giác vuông SAB và SBC ta có:</p> $\begin{cases} SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a \\ SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a\sqrt{3} \\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a \end{cases}$ $\begin{cases} dt(\Delta MBC) = \frac{1}{2} dt(\Delta ABC) = \frac{1}{4} AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2} SB \cdot BC = a^2\sqrt{3} \end{cases}$ <p>Suy ra:</p> $V_{S.BCM} = \frac{1}{3} dt(\Delta MBC) \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ $d(M, (SBC)) = \frac{3V_{S.BCM}}{dt(\Delta SBC)} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{4}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$	0.25
			0.25
4a	1	Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau.	1.0
CTC		<p>Cách 1:</p> <p>(d_1) đi qua điểm $M_1(1; -2; 5)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 3; 4)$</p>	0.25

	<p>(d_2) đi qua điểm $M_2(7;2;1)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (3;2;-2)$</p> <p>$\vec{M_1M_2} = (6;4;-4)$ và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-14;16;-5)$</p> <p>Do $\begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = -84 + 64 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau.}$</p> <p>Cách 2: Phương trình tham số của (d_1) và (d_2) là:</p> $(d_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = -2 + 3t_1 \\ z = 5 + 4t_1 \end{cases}; \quad (d_2) : \begin{cases} x = 7 + 3t_2 \\ y = 2 + 2t_2 \\ z = 1 - 2t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$ <p>Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + 2t_1 = 7 + 3t_2 & (1) \\ -2 + 3t_1 = 2 + 2t_2 & (2) \quad (*) \\ 5 + 4t_1 = 1 - 2t_2 & (3) \end{cases}$</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra : $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -2 \end{cases}$. Thay vào phương trình (3) ta thấy nó thỏa mãn.</p> <p>Suy ra hệ (*) có nghiệm là $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -2 \end{cases}$.</p> <p>Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại $M(1;-2;5)$.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
2	<p>Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2). Tính khoảng cách từ A đến (P).</p>	<p>1.0</p>
	<p>Do mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2) nên (P) đi qua điểm $M_1(1;-2;5) \in (d_1)$ và có VTPT là $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-14;16;-5)$</p> <p>Suy ra phương trình của mặt phẳng (P) là:</p> $-14(x-1) + 16(y+2) - 5(z-5) = 0$ $\Leftrightarrow 14x - 16y + 5z + 71 = 0$ <p>và khoảng cách từ A đến (P) là: $d(A, (P)) = \frac{ 14 + 16 + 5 + 71 }{\sqrt{14^2 + 16^2 + 5^2}} = \frac{106}{\sqrt{477}}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
5a	<p>Tìm môđun của số phức $z = \frac{1 + 2i - (1 - i)^3}{1 + i}$</p>	<p>1.0</p>
	<p>Ta có:</p> $z = \frac{1 + 2i - (1 - i)^3}{1 + i} = \frac{(1 + 2i)(1 - i) - (1 - i)^4}{(1 + i)(1 - i)}$ $= \frac{(1 + i - 2i^2) - (1 - 2i + i^2)^2}{1 + i^2}$ $= \frac{3 + i - 4i^2}{2} = \frac{7 + i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$ <p>Do đó: $z = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>

4b CTNC	1	Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.	1.0
		(d_1) đi qua điểm $M_1(0;1;6)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (1;2;3)$	0.25
		(d_2) đi qua điểm $M_2(1;-2;3)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (1;1;-1)$	0.25
		$\overline{M_1M_2} = (1;-3;-3)$ và $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & & 3 & 1 & & 1 & 2 \\ 1 & -1 & & -1 & 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-5;4;-1)$	0.25
		Do $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} = -5 - 12 + 3 = -14 \neq 0 \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.	0.25
	2	Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2) . Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) .	1.0
		Do mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song (d_2) nên (P) đi qua điểm $M_1(0;1;6) \in (d_1)$ và có VTPT là $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-5;4;-1)$	0.25
		Suy ra phương trình của mặt phẳng (P) là: $-5(x-0) + 4(y-1) - 1(z-6) = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow 5x - 4y + z - 2 = 0$	0.25
		và khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) là:	
		$d(d_1; d_2) = \frac{ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} }{ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] } = \frac{ -14 }{\sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{42}}$	0.25
5b		Tính và viết kết quả dưới dạng đại số số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^8$	1.0
		Ta có:	
		$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{1 - 3i^2} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2}{1 + 3}$	
		$= \frac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	0,25
		Dạng lượng giác của z_1 là: $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Suy ra:	0,25
		$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^8 = z_1^8 = \cos\left(8 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{16\pi}{3} + i \sin \frac{16\pi}{3}$	0,25
		$= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	0,25

Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì được đủ điểm từng phần như đáp án quy định.

-----Hết-----