

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH**Câu I** (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 4)$ và có hệ số góc là m . Tìm m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

Câu II (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(x + y) = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

2. Giải phương trình:
$$\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}$$

Câu III (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(x^2 + x + 1) dx$

Câu IV (1 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC . Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' , cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu V (1 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$

PHẦN TỰ CHỌN*Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần: Phần 1 hoặc Phần 2***PHẦN 1****Câu VI.a** (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2 - 2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Chứng minh rằng (P) giao (E) tại 4 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.

Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y - z + 17 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π .

Câu VII.a (1 điểm) Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$,

biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{6560}{n+1}$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

PHẦN 2

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$ và tam giác ABC có $A(2; 3)$, trọng tâm là điểm $G(2; 0)$, điểm B thuộc d_1 và điểm C thuộc d_2 . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1; 2; 5)$, $B(1; 4; 3)$, $C(5; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 3 = 0$. Gọi M là một điểm thay đổi trên mặt phẳng (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$

Câu VII.b (1 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) \\ e^{x+y} = x - y + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

-----***Hết***-----

Chú ý: *Thí sinh dự thi khối B và D không phải làm câu V.*

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

	Đặt $u = \frac{x^2 + 1}{y}$, $v = x + y - 2$ Ta có hệ $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1$	0,25
	Suy ra $\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 1 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases}$. Giải hệ trên ta được nghiệm của hpt đã cho là (1; 2), (-2; 5)	0,25
II.2	Giải phương trình lượng giác	1,00
	Điều kiện: $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ Ta có $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$	0,25
	Phương trình đã cho tương đương với $\Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}$	0,25
	$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ (loại)} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$. Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$	0,25
III	Tính tích phân	1,00
	Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + x + 1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx \\ v = x^2 / 2 \end{cases}$	0,25
	$I = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big _0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + x + 1} dx$	
	$= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 1) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ $= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} (x^2 - x) \Big _0^1 + \frac{1}{4} \ln(x^2 + x + 1) \Big _0^1 - \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{3}{4} I_1$	0,25
	* Tính I_1 : $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$. Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	0,25
	Suy ra $I_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{1 + \tan^2 t} = \frac{2\sqrt{3}}{3} t \Big _{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$	
	Vậy $I = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$	0,25

IV	Tính thể tích khối lăng trụ	1,00
	Gọi M là trung điểm của BC, gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AA', Khi đó (P) ≡ (BCH). Do góc $\widehat{A'}AM$ nhọn nên H nằm giữa AA'. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi (P) là tam giác BCH.	0,25
	Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	0,25
	Theo bài ra $S_{BCH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}HM \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$	
	$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$ Do hai tam giác A'AO và MAH đồng dạng nên $\frac{A'O}{AO} = \frac{HM}{AH}$ suy ra $A'O = \frac{AO \cdot HM}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3a} = \frac{a}{3}$	0,25
	Thể tích khối lăng trụ: $V = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2}A'O \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$	0,25
V	Tìm giá trị lớn nhất ...	1,00
	Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} = \frac{1}{a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{ab + b + 1}$	0,50
	Tương tự $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{bc + c + 1}$, $\frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{ca + a + 1}$	
	$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{b + 1 + ab} + \frac{b}{1 + ab + b} \right) = \frac{1}{2}$	0,25
	$P = \frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0,25
VIa.1	Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của (E) và (P)	1,00
	Hoành độ giao điểm của (E) và (P) là nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0$ (*)	0,25
	Xét $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$, $f(x)$ liên tục trên R có $f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$, $f(2)f(3) < 0$ suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt, do đó (E) cắt (P) tại 4 điểm phân biệt	0,25
	Toạ độ các giao điểm của (E) và (P) thỏa mãn hệ $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 16x = 8y \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0 (**)$	
	(**) là phương trình của đường tròn có tâm $I = \left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{161}}{9}$ Do đó 4 giao điểm của (E) và (P) cùng nằm trên đường tròn có phương trình (**)	0,25
Vla.2	Viết phương trình mặt phẳng (β)...	1,00
	Do (β) // (α) nên (β) có phương trình $2x + 2y - z + D = 0$ ($D \neq 17$) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$ Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính $r = 3$.	0,25
	Khoảng cách từ I tới (β) là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$	0,25
	Do đó $\frac{ 2 \cdot 1 + 2(-2) - 3 + D }{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 4 \Leftrightarrow -5 + D = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -7 \\ D = 17 \text{ (loại)} \end{cases}$	0,25
	Vậy (β) có phương trình $2x + 2y - z - 7 = 0$	0,25
VII.a	Tìm hệ số của x^2...	1,00
	Ta có $I = \int_0^2 (1+x)^n dx = \int_0^2 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) dx$ $= \left(C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1} \right) \Big _0^2$	0,25
	suy ra $I = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n$ (1)	
	Mặt khác $I = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \Big _0^2 = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$ (2)	
	Từ (1) và (2) ta có $2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$	0,25
	Theo bài ra thì $\frac{3^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{6560}{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1} = 6561 \Rightarrow n = 7$	
	Ta có khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_0^7 C_7^k (\sqrt{x})^{7-k} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_0^7 \frac{1}{2^k} C_7^k x^{\frac{14-3k}{4}}$	0,25
	Số hạng chứa x^2 ứng với k thỏa mãn $\frac{14-3k}{4} = 2 \Leftrightarrow k = 2$	0,25
	Vậy hệ số cần tìm là $\frac{1}{2^2} C_7^2 = \frac{21}{4}$	
VII.b.1	Viết phương trình đường tròn	1,00
	Do $B \in d_1$ nên $B = (m; -m-5)$, $C \in d_2$ nên $C = (7-2n; n)$	0,25
	Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} 2+m+7-2n=3.2 \\ 3-m-5+n=3.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2n=-3 \\ -m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$	0,25
	Suy ra $B = (-1; -4)$, $C = (5; 1)$	
	Giả sử đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Do $A, B, C \in (C)$ nên ta có hệ	
	$\begin{cases} 4+9+4a+6b+c=0 \\ 1+16-2a-8b+c=0 \\ 25+1+10a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-83/54 \\ b=17/18 \\ c=-338/27 \end{cases}$	0,25
	Vậy (C) có phương trình $x^2 + y^2 - \frac{83}{27}x + \frac{17}{9}y - \frac{338}{27} = 0$	0,25

VIb.2	Tìm giá trị nhỏ nhất ...	1,00												
	<p>Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $G = \left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$</p> <p>Ta có $F = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$ $= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$</p>	0,25												
	F nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên (P)	0,25												
	$\Leftrightarrow MG = d(G, (P)) = \frac{ 7/3 - 8/3 - 3 - 3 }{\sqrt{1+1+1}} = \frac{19}{3\sqrt{3}}$	0,25												
	$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{56}{9} + \frac{32}{9} + \frac{104}{9} = \frac{64}{3}$	0,25												
	Vậy F nhỏ nhất bằng $3 \cdot \left(\frac{19}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{64}{3} = \frac{553}{9}$ khi M là hình chiếu của G lên (P)													
VIIb	Giải hệ phương trình mũ	1,00												
	$\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) \\ e^{x+y} = x-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = x+y+1 \\ e^{x+y} = x-y+1 \end{cases}$ <p>Đặt $u = x + y$, $v = x - y$ ta có hệ $\begin{cases} e^v = u + 1 \\ e^u = v + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u + 1 & (1) \\ e^u - e^v = v - u & (2) \end{cases}$</p>	0,25												
	<p>- Nếu $u > v$ thì (2) có vế trái dương, vế phải âm nên (2) vô nghiệm - Tương tự nếu $u < v$ thì (2) vô nghiệm, nên (2) $\Leftrightarrow u = v$</p>	0,25												
	<p>Thế vào (1) ta có $e^u = u + 1$ (3). Xét $f(u) = e^u - u - 1$, $f'(u) = e^u - 1$ Bảng biến thiên:</p> <table border="1" data-bbox="508 1010 1149 1178"> <tbody> <tr> <td>u</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f'(u)</td> <td></td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>f(u)</td> <td></td> <td></td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">$\swarrow \quad \searrow$ 0</p>	u	$-\infty$	0	$+\infty$	f'(u)		-	0	f(u)			+	0,25
u	$-\infty$	0	$+\infty$											
f'(u)		-	0											
f(u)			+											
	Theo bảng biến thiên ta có $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.													
	Do đó (3) có 1 nghiệm $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	0,25												
	Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm (0; 0)													