ĐÁP ÁN THAM KHẢO MÔN TOÁN KHỐI D

Phần chung cho tất cả thí sinh

Câu I.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi m = 0

Khi đó hàm số trở thành: $y = x^4 - 2x^2$

- TXĐ: R.
- Hàm số là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy
- $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

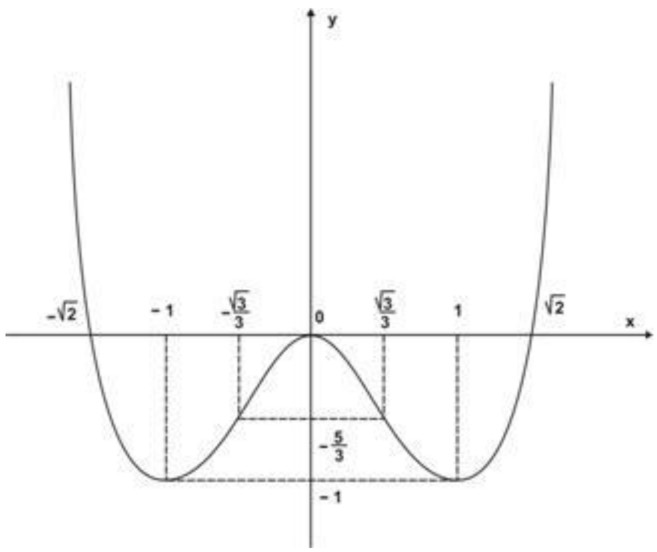
Ta có: $f(0) = 0; f(\pm 1) = -1.$

- $y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9}$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{5}{9}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{9}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị lõm trong các khoảng: $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$ và lồi trong $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm1$; đạt cực đại tại $x=0$.
- Vẽ đồ thị: đồ thị tiếp xúc với Ox tại $x=0$ và cắt Ox tại $x=\pm\sqrt{2}$.



2. Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$ (*)

Đặt $t=x^2\geq 0$ thì (*) trở thành:

$t^2-(3m+2)t+3m+1=0$ (**)

Giả sử các nghiệm của (*) là $x_1<x_2<x_3<x_4<2$

Thì $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$

với $0 < t_1 < t_2$ là các nghiệm (**)

Do đó: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} < 2$

$\Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2 < 4$

Nhưng (**) $\Leftrightarrow (t-1)(t-3m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3m+1 \end{array}\right.$

Do đó bài toán thoả mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Câu II.

1. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) = \sin x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{3} - 5x) = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{3} = -x + 2k\pi \\ 5x - \frac{\pi}{3} = \pi + x + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

2. Điều kiện xác định: $x \neq 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = \frac{3}{x} \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} u + 1 = 3v \\ u^2 - 5v^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3v - 1 \\ (3v-1)^2 - 5v^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2v^2 - 3v + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

+) v = 1 $\Rightarrow$ u = 2 Ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ \dfrac{1}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

+) $v=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u=\dfrac{1}{2}$ Ta có: $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Kết hợp ĐKXĐ, hệ đã cho có 2 nghiệm (x; y) là : $(1;1)$ và $\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

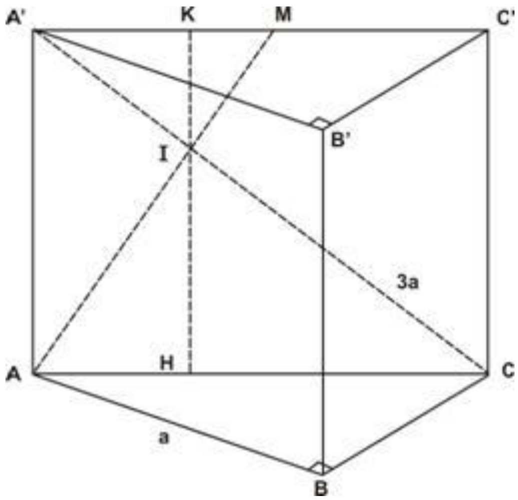
Câu III.

Đặt $t=e^x-1 \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t+1}$

$x=1 \Rightarrow t=e-1$
$x=3 \Rightarrow t=e^3-1$

$$I=\int_{e-1}^{e^3-1}\frac{dt}{t(t+1)}=\int_{e-1}^{e^3-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_{e-1}^{e^3-1}$$
$$=\ln\left(e^3-1\right)-\ln e^3-\ln\left(e-1\right)+\ln e$$
$$=\ln\left(e^3-1\right)-\ln\left(e-1\right)-2$$
$$=\ln\left(e-1\right)\left(e^2+e+1\right)-\ln\left(e-1\right)-2$$
$$=\ln\left(e^2+e+1\right)-2.$$

Câu IV.



+) Từ I hạ $IH \perp AC \Rightarrow IH \perp (ABC)$

$\Delta AA'C: AC^2 = A'C^2 - AA'^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$

$AC^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$

$\Delta ABC: BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a\,2a = a^2$

$\frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\frac{A'M}{AC} = \frac{IK}{IH} = \frac{1}{2} \Rightarrow IH = 2IK \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow V_{IABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2 2a}{3} = \frac{2a^3}{9}$

Từ trên $\Rightarrow HC = 2AH$

$\frac{HD}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow HD = \frac{2}{3}a$

$ID^2 = IH^2 + HD^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = \frac{8a^2}{9} \Rightarrow ID = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}.2a.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$

Khoảng cách từ A đến $(ABC) = \frac{3V_{IABC}}{S_{IBC}} = \frac{3.\frac{2a^3}{9}}{2a^2\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu V.

Đặt $xy = t$, với $x, y \geq 0$ thì

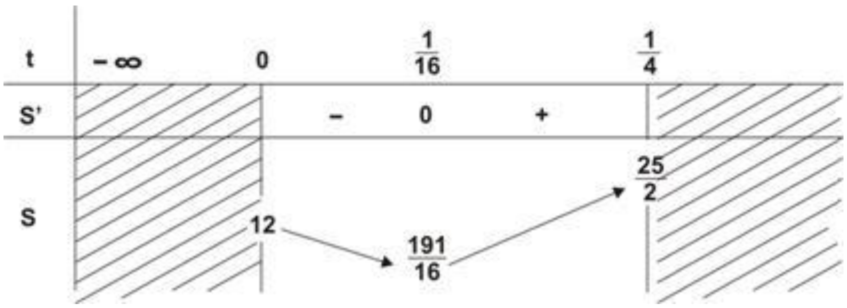
$0 \leq xy = t \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Khi đó:

$S = 16t^2 - 2t + 12$

$S' = 32t - 2$

Lập bảng biến thiên của S với $t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$



Từ đó ta có: S đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{191}{16}$ và đạt giá trị lớn nhất là $\frac{25}{2}$

Phần riêng

A. Theo chương trình Chuẩn.

Câu VI. a

1. Toạ độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 2)$$

Suy ra toạ độ $B(3; -2)$

Phương trình đường cao AH: $6x - y - 4 = 0 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC là:

$$\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

Gọi E là trung điểm của BC, tọa độ E tìm được từ hệ:

$$\begin{cases}7x-2y-3=0\\x=3+6t\\y=-2-t\end{cases}$$

Tìm được $E\left(0;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow C(-3;-1)$

Phương trình đường thẳng AC là: $3x-4y+5=0$.

2. Phương trình đường thẳng AB là:

$$\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=2t\end{cases}$$

Toạ độ D có dạng $D(2-t;1+t;2t)\Rightarrow\overrightarrow{CD}=(1-t;t;2t)$

Vectơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

$CD//(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}.\vec{n}=0\Leftrightarrow(1-t)+t+2t=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Vậy $D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

Câu VII. a

Giả sử z = a + bi với a; b $\in\mathbb{R}$ vì M (a ; b) là điểm biểu diễn của z.

Ta có: $\left|a+bi-(3-4i)\right|=2\Leftrightarrow\left|(a-3)+(b+4)i\right|=2$

$\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+4)^2=4$

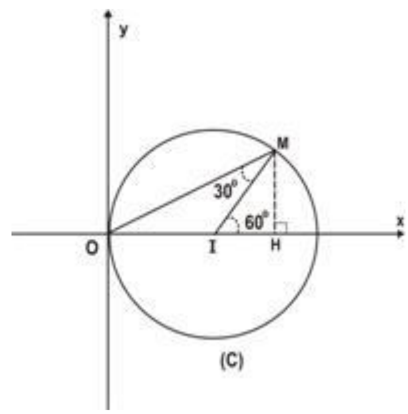
$\Leftrightarrow$ M(a;b) thuộc đường tròn tâm I$(3;-4)$, bán kính $R = 2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI. b

1. Đường tròn (C) có tâm (1; 0) bán kính R = 1

Từ giả thiết ta có: $\widehat{MIx} = 60^0$



Gọi H là hình chiếu của M trên Ox, ta có:

$IH = IM.\cos\widehat{MIH} = 1.\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow OH = \frac{3}{2}$

$MH = IM.\sin\widehat{MIH} = 1.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Do tính chất đối xứng của đường tròn, ta có 2 điểm M thỏa mãn là:

$M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Gọi M là giao điểm của Δ và (P), tìm được $M(-3;1;1)$

Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}$ = (1; 1; -1); $\overrightarrow{n_P}$ = (1; 2; –3);

$\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]$ = (–1; 2; 1)

$\Rightarrow d:\qquad \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

Câu VII.b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị thoả mãn

$$\frac{x^2+x-1}{x}=-2x+m$$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=-2x^2+mx$ (với $x\neq 0$)

$\Leftrightarrow 3x^2+x(1-m)-1=0$ (1)

Phương trình (1) có $ac=-3<0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt là $x_1<0<x_2$.

Khi đó: $A(x_1;-2x_1+m)$ và $B(x_2;-2x_2+m)$.

Suy ra trung điểm AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};-(x_1+x_2)+m\right)$.

I thuộc trục tung $\Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}=0\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{6}=0\Leftrightarrow m=1$

(vì theo định lý Vi-ét thì $x_1+x_2=\dfrac{m-1}{3}$).

Vậy m = 1