

# ĐÁP ÁN THAM KHẢO MÔN TOÁN KHỐI D

## Phần chung cho tất cả thí sinh

### Câu I.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi  $m = 0$

Khi đó hàm số trở thành:  $y = x^4 - 2x^2$

- TXĐ:  $\mathbb{R}$ .
- Hàm số là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy

- $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

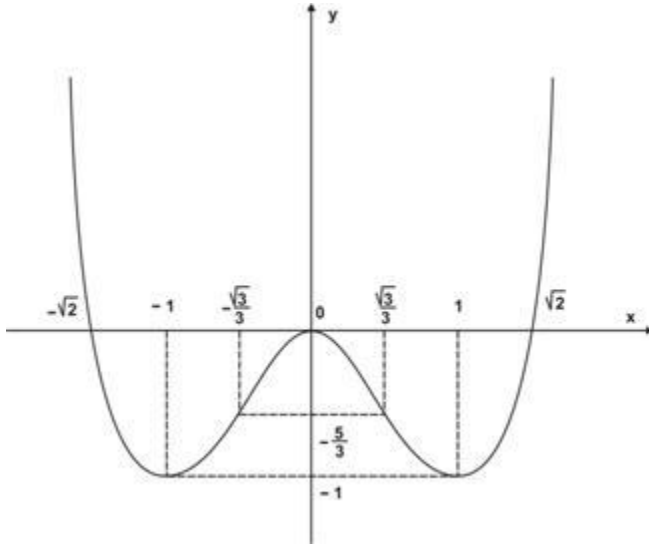
Ta có:  $f(0) = 0; f(\pm 1) = -1$ .

- $y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9}$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
y'		- 0 +		+ 0 -		- 0 +	
y''		+ + 0 -		- 0 +		+ +	
y	$+\infty$	-1	$-\frac{5}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	-1	$+\infty$

Đồ thị lõm trong các khoảng:  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$  và lồi trong  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

- Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \pm 1$ ; đạt cực đại tại  $x = 0$ .
- Vẽ đồ thị: đồ thị tiếp xúc với Ox tại  $x = 0$  và cắt Ox tại  $x = \pm\sqrt{2}$ .



2. Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m+1 = 0 (*)$$

Đặt  $t = x^2 \geq 0$  thì (\*) trở thành:

$$t^2 - (3m+2)t + 3m+1 = 0 (**)$$

Giả sử các nghiệm của (\*) là  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 2$

Thì  $x_1 = -\sqrt{t_2}$ ;  $x_2 = -\sqrt{t_1}$ ;  $x_3 = \sqrt{t_1}$ ;  $x_4 = \sqrt{t_2}$

với  $0 < t_1 < t_2$  là các nghiệm (\*\*)

Do đó:  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} < 2$

$\Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2 < 4$

Nhưng (\*\*)  $\Leftrightarrow (t-1)(t-3m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3m+1 \end{cases}$

Do đó bài toán thoả mãn  $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$

**Câu II.**

1. Giải phương trình:  $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{3} = -x + 2k\pi \\ 5x - \frac{\pi}{3} = \pi + x + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Điều kiện xác định:  $x \neq 0$

Hệ phương trình 
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = \frac{3}{x} \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt 
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ta có: 
$$\begin{cases} u + 1 = 3v \\ u^2 - 5v^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3v - 1 \\ (3v - 1)^2 - 5v^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2v^2 - 3v + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) v = 1 \Rightarrow u = 2 \text{ Ta có: } \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

$$+) v = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \text{ Ta có: } \begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Kết hợp ĐKXD, hệ đã cho có 2 nghiệm  $(x; y)$  là:  $(1; 1)$  và  $\left(2; -\frac{3}{2}\right)$ .

### Câu III.

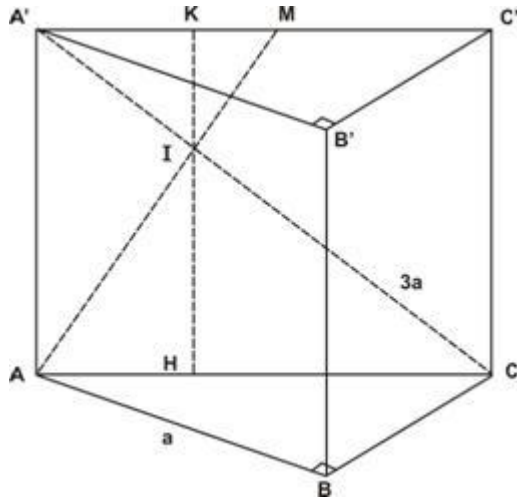
$$\text{Đặt } t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t+1}$$

$$x = 1 \Rightarrow t = e - 1$$

$$x = 3 \Rightarrow t = e^3 - 1$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{e-1}^{e^3-1} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{e-1}^{e^3-1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left( \ln|t| - \ln|t+1| \right) \Big|_{e-1}^{e^3-1} \\ &= \ln(e^3 - 1) - \ln e^3 - \ln(e - 1) + \ln e \\ &= \ln(e^3 - 1) - \ln(e - 1) - 2 \\ &= \ln(e - 1)(e^2 + e + 1) - \ln(e - 1) - 2 \\ &= \ln(e^2 + e + 1) - 2. \end{aligned}$$

**Câu IV.**



+) Từ I hạ  $IH \perp AC \Rightarrow IH \perp (ABC)$

$$\triangle AA'C: AC^2 = A'C^2 - AA'^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$$

$$AC^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$$

$$\triangle ABC: BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$$

$$\frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{A'M}{AC} = \frac{IK}{IH} = \frac{1}{2} \Rightarrow IH = 2IK \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow V_{IABC} = \frac{1}{3} \frac{a^2 \cdot 2a}{3} = \frac{2a^3}{9}$$

Từ trên  $\Rightarrow HC = 2AH$

$$\frac{HD}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow HD = \frac{2}{3}a$$

$$ID^2 = IH^2 + HD^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = \frac{8a^2}{9} \Rightarrow ID = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$$

$$(ABC) = \frac{3V_{IABC}}{S_{IBC}} = \frac{3 \cdot \frac{2a^3}{9}}{2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Khoảng cách từ A đến

### Câu V.

Đặt  $xy = t$ , với  $x, y \geq 0$  thì

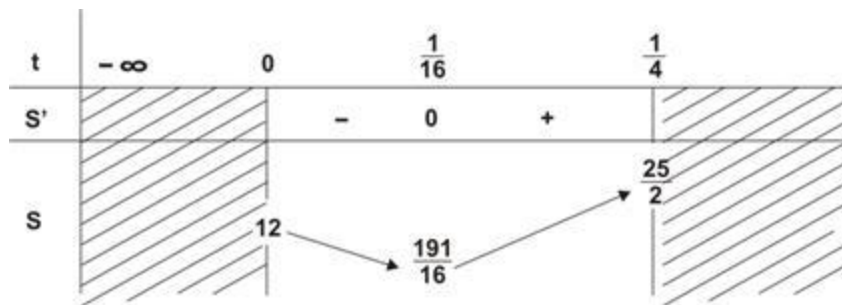
$$0 \leq xy = t \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Khi đó:

$$S = 16t^2 - 2t + 12$$

$$S' = 32t - 2$$

Lập bảng biến thiên của S với  $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$



Từ đó ta có: S đạt giá trị nhỏ nhất là  $\frac{191}{16}$  và đạt giá trị lớn nhất là  $\frac{25}{2}$

## Phần riêng

### A. Theo chương trình Chuẩn.

#### Câu VI. a

1. Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 2)$$

Suy ra tọa độ B(3; -2)

Phương trình đường cao AH:  $6x - y - 4 = 0 \Rightarrow$  phương trình đường thẳng BC là:

$$\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

Gọi E là trung điểm của BC, tọa độ E tìm được từ hệ:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ x = 3 + 6t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

Tim được  $E\left(0, -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow C(-3, -1)$

Phương trình đường thẳng AC là:  $3x - 4y + 5 = 0$ .

2. Phương trình đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Toạ độ D có dạng  $D(2 - t; 1 + t; 2t) \Rightarrow \overline{CD} = (1 - t; t; 2t)$

Vector pháp tuyến của (P) là:  $\vec{n} = (1; 1; 1)$ .

$$CD // (P) \Leftrightarrow \overline{CD} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (1 - t) + t + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Vậy  $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ .

### Câu VII. a

Giả sử  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  vì  $M(a; b)$  là điểm biểu diễn của  $z$ .

Ta có:  $|a + bi - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(a - 3) + (b + 4)i| = 2$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 4$$

$\Leftrightarrow M(a;b)$  thuộc đường tròn tâm  $I(3; -4)$ , bán kính  $R = 2$ .

## B. Theo chương trình Nâng cao

### Câu VI. b

1. Đường tròn (C) có tâm  $I(1; 0)$  bán kính  $R = 1$

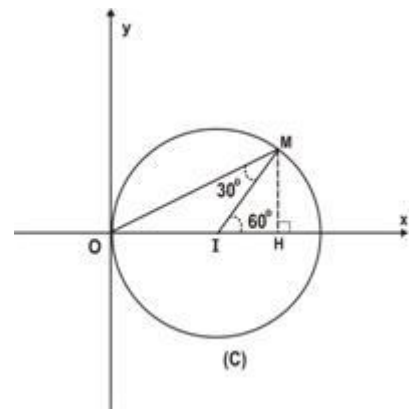
Từ giả thiết ta có:  $\angle M I x = 60^\circ$

Gọi H là hình chiếu của M trên Ox, ta có:

$$IH = IM \cdot \cos \angle M I H = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow OH = \frac{3}{2}$$

$$MH = IM \cdot \sin \angle M I H = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Do tính chất đối xứng của đường tròn, ta có 2 điểm M thỏa mãn là:

$$M_1\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } M_2\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. Gọi M là giao điểm của  $\Delta$  và (P), tìm được  $M(-3; 1; 1)$

Vector chỉ phương của  $\Delta$  là  $\vec{u}_\Delta = (1; 1; -1)$ ;  $\vec{n}_P = (1; 2; -3)$ ;

$$\left[ \vec{u}_\Delta, \vec{n}_P \right] = (-1; 2; 1)$$

$$\Rightarrow d: \quad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

### Câu VII.b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị thoả mãn

$$\frac{x^2 + x - 1}{x} = -2x + m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = -2x^2 + mx \quad (\text{với } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x(1-m) - 1 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có  $\Delta = -3 < 0$  nên luôn có 2 nghiệm phân biệt là  $x_1 < 0 < x_2$ .

Khi đó:  $A(x_1; -2x_1 + m)$  và  $B(x_2; -2x_2 + m)$ .

Suy ra trung điểm AB là  $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; -(x_1 + x_2) + m\right)$ .

I thuộc trục tung  $\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 1$

(vì theo định lý Vi-ét thì  $x_1 + x_2 = \frac{m-1}{3}$ ).

Vậy  $m = 1$