BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2009

Môn thi: TOÁN; Khối: A

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề.

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm):

Câu I (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc toạ độ O.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$.
2. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

Câu III (1,0 điểm)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1)\cos^2 x\, dx$.

Câu IV (1,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Câu V (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Câu VII.a (1,0 điểm)

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.
2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu VII.b (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

---------- Hết ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. ; Số báo danh...............................

BÀI GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

+ Tập xác định: $x \neq -\frac{3}{2}$

+ $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0 \ \forall\ x \neq -\frac{3}{2}$

+ Tiệm cận

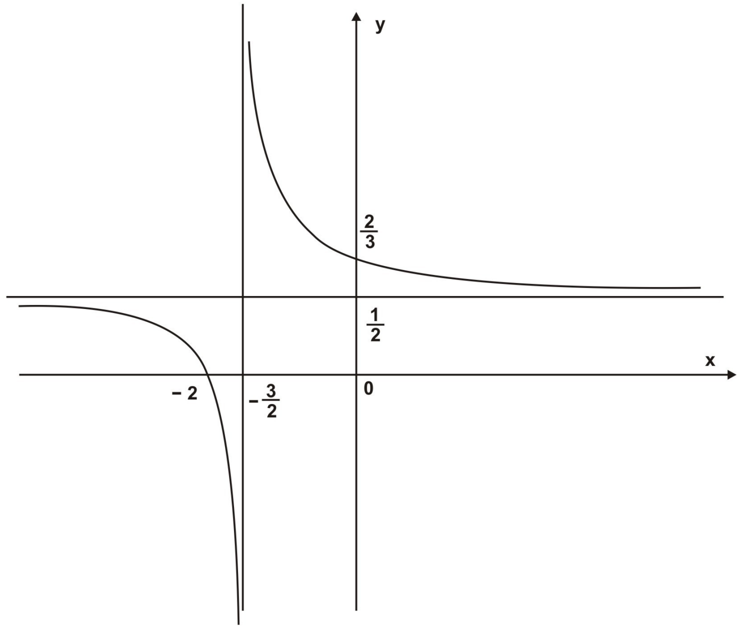
Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+3} = \frac{1}{2}$ nên tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

Vì $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{2}\right)^+}\frac{x+2}{2x+3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{2}\right)^-}\frac{x+2}{2x+3} = -\infty$ nên tiệm cận đứng là $x = -\frac{3}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'			‖		
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Vẽ đồ thị: đồ thị cắt Oy tại $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ và cắt Ox tại (-2; 0)



2. Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến tại $x = x_0$ (với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$) là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = \frac{-x}{(2x_0+3)^2} + \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}$$

Do đó tiếp tuyến cắt Ox tại A($2x_0^2 + 8x_0 + 6$;0)

và cắt Oy tại B(0; $\frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}$)

Tam giác OAB cân tại O $\Leftrightarrow$ OA = OB (với OA > 0)

$$\Leftrightarrow |x_A| = |y_B| \Leftrightarrow |2x_0^2 + 8x_0 + 6| = \left|\frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow (2x_0+3)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{array}\right. .$$

Thử lại $x_0 = -2$ thỏa mãn. Ta có tiếp tuyến $y = -x - 2$

Câu II.

1. ĐKXĐ: $\begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \,;\, x \neq \frac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow$ $\cos x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\,(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x)$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\,(1 - 2\sin^2 x)$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{5\pi}{6} + \cos x.\sin\frac{5\pi}{6} = \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ x + \frac{5\pi}{6} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đkxđ ta có họ nghiệm của pt là:

$$x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}\ (n \in \mathbb{Z})$$

2. Đkxđ: $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$ (*)

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt[3]{3x - 2} \\ v = \sqrt{6 - 5x} \end{array}\right.$ $(v \geq 0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u^3 = 3x - 2 \\ v^2 = 6 - 5x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v = \frac{8 - 2u}{3} \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow 15u^3 + 64 - 32u + 4u^2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 2)(15u^2 - 26u + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ 15u^2 - 26u + 20 = 0 \ \text{ vô } n_0 \text{ do } \Delta' = 13^2 - 15.20 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow x = -2\,(\text{tm}).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là S={-2}

Câu III.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx$

Ta có: $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Mặt khác xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x.\cos x.dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left(\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

Câu IV.

Vì (SBI)và (SCI)vuông góc với (ABCD) nên $SI \perp (ABCD)$.

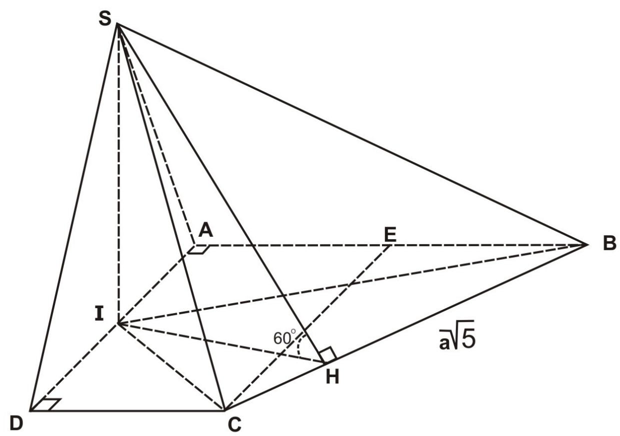
Ta có $IB = a\sqrt{5}; BC = a\sqrt{5}; IC = a\sqrt{2};$

Hạ $IH \perp BC$ tính được $IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$;

Trong tam giác vuông SIH có $SI = IH\ \tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

$S_{ABCD} = S_{AECD} + S_{EBC} = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ (E là trung điểm của AB).

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}SI = \frac{1}{3}3a^2\frac{3a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.



Câu V.

Từ giả thiết ta có:

$x^2 + xy + xz = 3yz \Leftrightarrow (x + y)(x + z) = 4yz$

Đặt $a = x + y$ và $b = x + z$

Ta có: $(a – b)^2 = (y – z)^2$ và $ab = 4yz$

Mặt khác

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b)^2$

$$\le \sqrt{2(a^2+b^2)}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(a-b)^2+2ab\right]}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y-z)^2+2yz\right]}\left[(y-z)^2+4yz\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y+z)^2+4yz\right]}(y+z)^2$$

$$\le \sqrt{4(y+z)^2}(y+z)^2 = 2(y+z)^2 \quad (1)$$

Ta lại có:

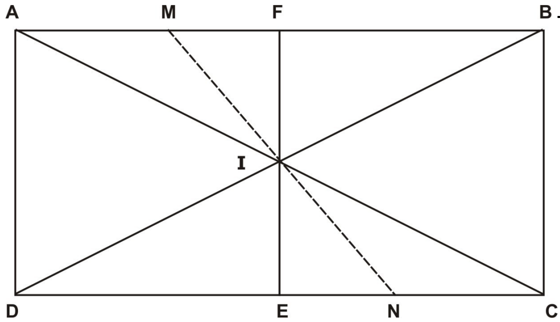
$3(x + y)(y +z)(z + x) = 12yz(y + z)$

$\le 3(y + z)^2 . (y + z) = 3(y + z)^3 \qquad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Câu VI .a

1. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, F là điểm đối xứng vơi E qua I.



Ta có $N \in DC$, $F \in AB$, $IE \perp NE$.

Tính được $N = (11; -1)$.

Giả sử $E = (x; y)$, ta có:

$\overrightarrow{IE} = (x - 6; y - 2)$; $\overrightarrow{NE} = (x - 11; y + 1)$.

$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{NE} = x^2 - 17x + 66 + y^2 - y - 2 = 0$ (1)

$E \in \Delta \Rightarrow x + y - 5 = 0$. (2)

Giải hệ (1), (2) tìm được $x_1 = 7$; $x_2 = 6$.

Tương ứng có $y_1 = -2$; $y_2 = -1 \Rightarrow E_1 = (7; -2)$; $E_2 = (6; -1)$

Suy ra $F_1 = (5; 6)$, $F_2 = (6; 5)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng AB là $x - 4y + 19 = 0$ hoặc $y = 5$.

2. Mặt cầu có tâm I(1;2;3) bán kính R=5

Khoảng cách từ tâm I đến mp (P) là

$$d(I;(P)) = \frac{|2.1 - 2.2 - 3 - 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3.$$

Vì d(I;(P)) <R nên (P) cắt (S) theo đường tròn.

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) thì H là giao của mp(P) với đường thẳng qua I, vuông góc với (P). Dễ dàng tìm được H= (3;0;2).

Bán kính đường tròn là: $\sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Câu VII. a

Phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 10 = -9 = (3i)^2$

nên phương trình có hai nghiệm là:

$z_1 = -1 - 3i$ và $z_2 = -1 + 3i$

Suy ra $\begin{cases} |z_1|^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10 \\ |z_2|^2 = (-1)^2 + (3)^2 = 10 \end{cases}$

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20$

Chương trình nâng cao

Câu VI. b

1. $(C): (x+2)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{2})^2$

Đường tròn (C) có tâm I(-2;-2); bán kính $R = \sqrt{2}$

$\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$

Gọi H là hình chiếu của I trên Δ.

- Để Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì: IH<R
- Khi đó $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = IH.HA \le \frac{IH^2 + HA^2}{2} = \frac{IA^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 1$

$\Rightarrow (S_{\Delta IAB})_{max} = 1$ khi $IH = HA = 1$ (hiển nhiên $IH < R$)

$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |1-4m| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{array}\right.$

Vậy, có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là: m = 0 và $m = \frac{8}{15}$

2. Giả sử M(a;b;c) là điểm cần tìm.

- Vì $M \in \Delta_1$ nên: $\frac{a+1}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c+9}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ c = 6b - 9 \end{cases}$
- Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d = d(M;(P)) = \frac{|a - 2b + 2c - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11b - 20|}{3}$$

- Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2, ta có:

$$\vec{n}_{(Q)} = \vec{u}_{\Delta_2} = (2;1;-2)$$

$\Rightarrow (Q): 2(x-a) + 1(y-b) - 2(z-c) = 0$

Hay (Q): $2x + y - 2z + 9b - 16 = 0$

Gọi H là giao điểm của (Q) và $\Delta_2 \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(-2b+3; -b+4; 2b-3)$$

$$\rightarrow MH^2 = (3b-4)^2 + (2b-4)^2 + (4b-6)^2 = 29b^2 - 88b + 68$$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$MH^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow 29b^2 - 88b + 68 = \frac{(11b-20)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 261b^2 - 792b + 612 = 121b^2 - 440b + 400$$

$$\Leftrightarrow 140b^2 - 352b + 212 = 0$$

$$\Leftrightarrow 35b^2 - 88b + 53 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \dfrac{53}{35} \end{array} \right.$$

Vậy có 2 điểm thoả mãn là: M(0;1;-3) và $M\left(\dfrac{18}{35}; \dfrac{53}{35}; \dfrac{3}{35}\right)$

Câu VII b.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad xy > 0$

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(2;2); (-2;-2)\} \text{ : thỏa mãn}$$

Nhóm chuyên gia giải đề:

TS. Lê Thống Nhất, ThS Đặng Văn Quản, ThS Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hảo

Nhận xét đề thi môn Toán khối A năm 2009

Đề thi đảm bảo tính chính xác và phân loại tốt.

Đối với phần chung (7 điểm) đề thi bám sát các kiến thức cơ bản về khảo sát hàm số, phương trình tiếp tuyến tại một điểm, phương trình lượng giác (sử dụng các công thức về góc nhân đôi, công thức cộng góc đưa về dạng cơ bản), phương trình vô tỷ (sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ), tính tích phân hàm lượng giác (sử dụng đổi biến và hạ bậc hàm lượng giác). Bài hình học là bài toán cơ bản về tính thể tích khối đa diện. Riêng câu V về bất đẳng thức là dành cho học sinh khá, giỏi đòi hỏi phải có biến đổi biểu thức để đưa giả thiết về dạng đối xứng và sử dụng các bất đẳng thức cơ bản (Cô – si, Bunhicopsky với n = 2).

Phần riêng cho từng chương trình :

- Với chương trình chuẩn : bài hình học sẽ là khó khăn cho học sinh bình thường nhưng bài về số phức lại quá dễ như sách giáo khoa.
- Với chương trình nâng cao thì phần đại số là bài giải hệ cơ bản (tuy có logarit), phần hình học là phù hợp với các em học sinh.

Như vậy để được điểm tối đa đòi hỏi các em phải có kỹ năng và tư duy tốt. Điểm 10 năm nay chắc sẽ ít, nhất là phải vượt qua bài V.Các em học sinh học khá vẫn có thể hy vọng được 9 điểm.

TS. Lê Thống Nhất