

1) khảo sát

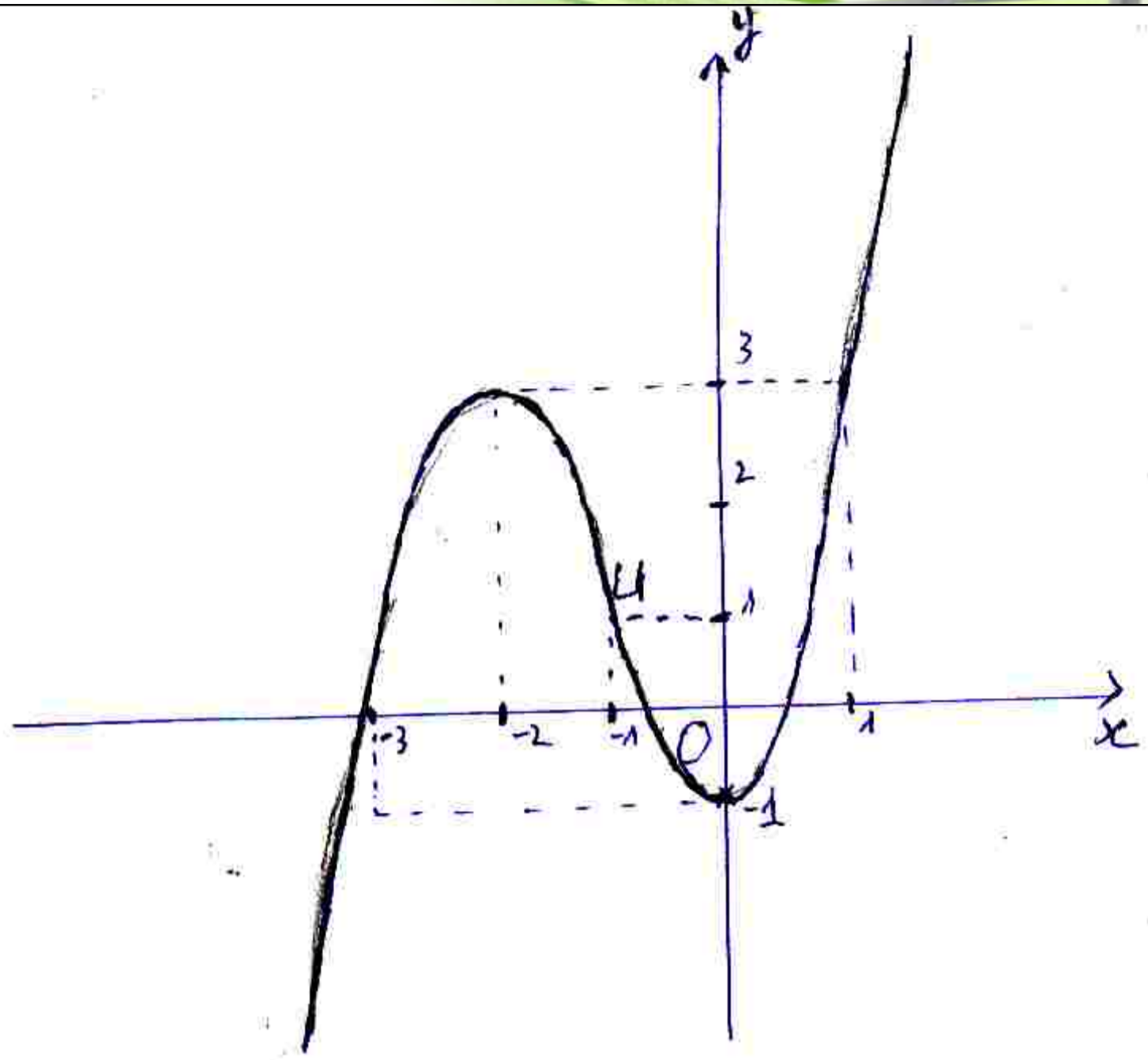
$$y = x^3 + 3x^2 - 1$$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- 2.

a) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 1) = -\infty$$



b) Đạo hàm và cực trị

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Kết luận. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$
 Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$
 Cực đại $(-2; 3)$; Cực tiểu $(0; -1)$

3. Đồ thị

$$a) \text{ Điểm uốn. Có } y'' = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
Đồ thị	Lồi	$U(-1; 1)$	Lõm

b) Đồ thị hàm số đi qua các điểm

x	-3	-2	-1	0	1
y	-1	3	1	-1	3

Nhận xét: đồ thị hàm số nhận điểm uốn $U(-1; 1)$ làm trục đối xứng

2) Viết phương trình tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$

Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$ và $y'(x_0) = -3$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng d: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow y = -3(x + 1) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = -3x - 3$$

$$\text{Vậy } y = -3x - 3$$

Câu 2.1. Giải: $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$. Tập xác định: \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow 2 \cos 4x + 2 \cos x + 8 \sin 2x - 2 \cos x = 5$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin^2 2x) + 8 \sin 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 2x + 8 \sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{3}{2} & (\text{Loại}) \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y & (1) \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 & (2) \end{cases} \quad \text{Đk: } 2x+y > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x+y + 2\sqrt{2x+y} + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+y} + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+y} + 1 = 2 \quad (\text{vì } \sqrt{2x+y} + 1 > 0 \quad \forall x, y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+y} = 1 \Leftrightarrow 2x+y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x$$

Thế vào (2) được

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x(1 - 2x) - (1 - 2x)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 2x - 1 + 4x - 4x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

(TMĐK.)

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$$3) I = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{2x+2-3}{x+1} dx = \int_0^1 2 dx - \int_0^1 \frac{3 dx}{x+1}$$
$$= 2x \Big|_0^1 - 3 \ln|x+1| \Big|_0^1 = 2 - 3 \ln 2$$

Câu 4. Gọi H là trung điểm của AB

Do $\triangle SAB$ cân tại S $\Rightarrow SH \perp AB$.

Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$

$(SAB) \cap (ABCD) = AB$

$SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ là góc \widehat{SCH}

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 45^\circ$

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$SH = HC \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot dt_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{5}}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$$

PHÂN RIÊNG CHUẨN

Câu 6. a) 1. $A(1; -2; 3)$ $B(-1; 0; 1)$

$$(P): x + y + z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}(1; 1; 1)$$

Phương trình đường thẳng Δ qua A $(1; -2; 3)$ vuông góc với (P) có dạng

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A trên $(P) \Rightarrow H$ chính là giao điểm của A và (P)

$$\Rightarrow 1 + t - 2 + t + 3 + t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Toạ độ H là } \left(-\frac{1}{3}; -\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$2. AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad \vec{AB}(-2; 2; -2)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng AB là } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm mặt cầu S.

Do $I \in AB$ nên ta giả sử $I(1-2t; 2t-2; 3-2t)$

Mặt cầu S tiếp xúc $(P) \rightarrow d(I; (P)) = AB$

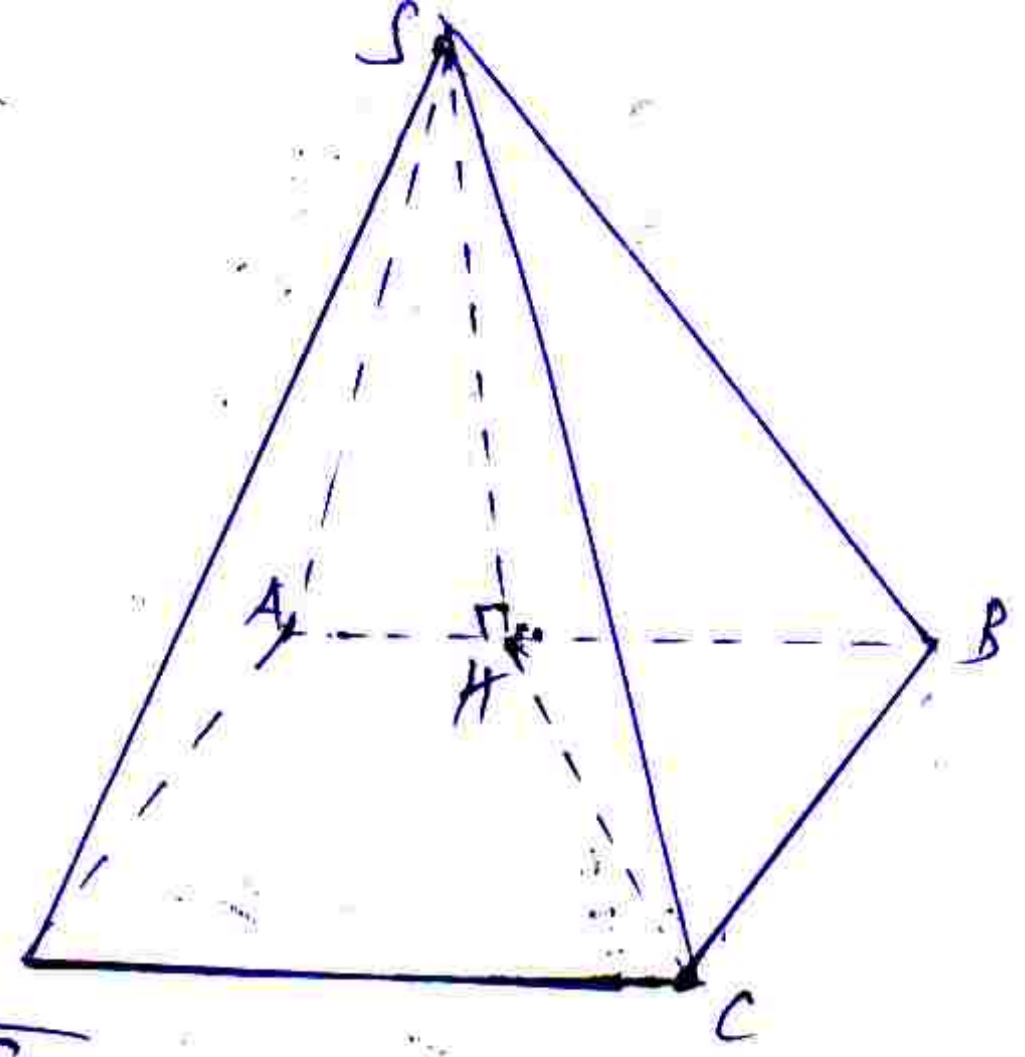
$$\Leftrightarrow \frac{|1-2t+2t-2+3-2t+4|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |6-2t| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$$

* Với $t=0 \Rightarrow I(1; -2; 3)$ Pt mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 2 = 0$$

+ Với $t=6 \Rightarrow I(-11; 10; -9)$ Pt mặt cầu $(x+11)^2 + (y-10)^2 + (z+9)^2 = 12$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 22x - 20y + 18z + 290 = 0$$



Câu 6b. 1. d: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \vec{u}_d (-2; 1; 1)$

(P): $2x - y + 2z - 2 = 0 \quad \vec{n} (2; -1; 2)$

$[\vec{u}_d; \vec{n}] = (| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} |; | \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{matrix} |; | \begin{matrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} |) = (3; 6; 0)$

G \odot $N(0; 1; 0) \in d$.

Pt mặt phẳng (Q) chứa d \perp (P) có dạng:

$3(x-0) + 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

2. d $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$

Giả sử M $(-2t; 1+t; t)$

$d(M; (P)) = \frac{|-4t - t - 1 + 2t - 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{|-3t - 3|}{3} = |t+1|$

$MO = \sqrt{4t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2} = \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$

$d(M; (P)) = MO \Rightarrow |t+1| = \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$
 $\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 6t^2 + 2t + 1$
 $\Leftrightarrow t = 0$
 $\Rightarrow M(0; 1; 0)$

Câu 7a. $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$

$z = a + bi$

$(2-3i)(a+bi) + (4+i)(a-bi) = -(1+3i)^2$

$\Leftrightarrow 2a + (2b-3a)i + 3b + 4a + (a-4b)i + b = -1 - 6i + 3$

$\Leftrightarrow 6a + 4b - 2(a+b)i = 2i - 6i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow z = -5 + 8i$

$$z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0 \quad (1)$$

$$\text{Pt (1) có } \Delta = (1+i)^2 - 4(6+3i) \\ = i^2 - 10i - 23$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\Delta} = a + bi$$

$$\Rightarrow i^2 - 10i - 23 = (a + bi)^2 \Leftrightarrow i^2 - 10i - 23 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$\Leftrightarrow -10i - 24 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ -10 = 2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \\ b = 1 \\ a = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \begin{cases} 5 - i \\ -5 + i \end{cases}$$

Pt (1) có nghiệm $z = i - 2$; $z = 3$

Câu 5. PHẦN CHUNG

$$3x + y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1 - 3x$$

$$\text{Ta có } 0 \leq 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x(1-3x)}}$$

$$\text{Theo BĐT Côsi } \sqrt{x(1-3x)} \leq \frac{x + 1 - 3x}{2} = \frac{1 - 2x}{2}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{1 - 2x} = f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = (1-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Lập bảng xét biến thiên

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

\searrow 8 \nearrow

Nhìn bảng biến thiên ta có A đạt giá trị nhỏ nhất = 8 tại $x = \frac{1}{4}$
 và $y = \frac{1}{4}$