Khối chuyên Toán - Tin trường ĐHKHTN-ĐHQGHN

Đề thi thử đại học lần 2 năm 2008-2009

Ngày thi: 15/3/2009

- *Thời gian: 180 phút.*
- *Typeset by LaTeX 2ε.*
-
- *Email: nguyendunghus@gmail.com.*
- *Mathematical blog: http://www.mathlinks.ro/weblog.php?w=1139*

1 Đề bài

Câu I (2 điểm)
1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{-2x^2 + 3x - 3}{x - 1}$$

2) Tìm các điểm thuộc (C) cách đều hai tiệm cận.
Câu II (2 điểm)
1) Giải phương trình lượng giác

$$9\sin^3 x - \sqrt{3}\cos x + \sin x \cos x(cosx - \sqrt{3}\sin x) - 6\sin x = 0$$

2) Tìm a để với mọi b hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} + (a+1)by^4 = a^2 \end{cases}$$

Câu III (2 điểm)
1) Tính thể tích khối tròn xoay nhận được do quay quanh trục Oy hình phẳng hữu hạn được giới hạn bởi các đường $y^2 = x$ và $3y - x = 2$.
2) Tính tổng sau theo n

$$S = C_{2n}^0 - 3C_{2n}^2 + 9C_{2n}^4 - 27C_{2n}^6 + \cdots + (-3)^n C_{2n}^{2n}$$

Câu IV (3 điểm)
1) Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ có phương trình tham số

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} ; \qquad d_2 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$$

a) Viết phương trình các mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và lần lượt đi qua $(d_1), (d_2)$.
b) Chứng minh rằng hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ chéo nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.
2) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$IA.IB.IC = 4Rr^2$$

Câu V (1 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2}$$

2 Lời giải tóm tắt

Câu I.
1) Điểm cực tiểu $(0; 3)$, điểm cực đại $(2; -5)$. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = -2x + 1$. (Bạn đọc tự vẽ đồ thị)
2) Xét điểm $M(x_0; -2x_0 + 1 - \frac{2}{x_0-1})$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số. Điểm M cách đều hai tiệm cận khi và chỉ khi

$$\frac{|x - 0 - 1|}{\sqrt{1}} = \frac{|2x_0 - 2x_0 + 1 - \frac{2}{x_0-1} - 1|}{\sqrt{5}}$$

hay

$$(x_0 - 1)^2 = \sqrt{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$

Vậy các điểm cần tìm là các điểm thuộc (C) và có hoành độ $x = 1 \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.
Câu II.
1) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&sin^3x - \sqrt{3}\cos x + \sin x \cos x(cosx - \sqrt{3}\sin x) = 2(3\sin x - 4\sin^3 x)\\
&\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \quad k, l \in Z.
\end{aligned}$$

2) Hệ đã cho có nghiệm với mọi b nên khi cho $b = 0$ hệ có nghiệm. Khi $b = 0$ hệ trên tương đương với

$$\left\{\begin{array}{l} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ 1 = a^2 \end{array}\right. \Rightarrow a = \pm 1$$

1. a = 1. Hệ trên trở thành

$$\left\{\begin{array}{l} y^5 = 1 \\ e^{bx} + 2by^4 = 1 \end{array}\right.$$

Cho b =1 thì hệ trên không có nghiệm, vậy loại trường hợp $a = 1$.

2. a=-1. Hệ trên trở thành

$$\left\{\begin{array}{l} -2x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} = 1 \end{array}\right.$$

Rõ ràng hệ này luôn có nghiệm $x = 0, y = 1$.

Vậy $a = -1$.
Câu III.
1) Xét phương trình tương giao $y^2 = 3y - 1 \Leftrightarrow y = 1, y = 2$. Ta có

$$V = \pi \int_1^2 \left((3y-2)^2 - y^4\right) dy = \frac{4}{5}\pi(d.v.t.t)$$

2) Xét khai triển

$$(1+i\sqrt{3})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (i\sqrt{3})^k$$
$$= (C_{2n}^0 - 3C_{2n}^2 + \cdots + (-3)^n_{2n}{}^{2n}) + i(\sqrt{3}^1_{2n} - 3\sqrt{3}C_{2n}^3 + \cdots + (-3)^{n-1}\sqrt{3}C_{2n}^{2n-1})$$

Mặt khác, theo định lí De Moirve, ta có

$$(1+i\sqrt{3})^{2n} = 2^{2n}(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3})$$

Đồng nhất phần thực, ta thu được

$$S = 2^{2n}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Câu IV.

1) a) Các đường thẳng $(d_1), (d_2)$ lần lượt có vector chỉ phương

$$\overrightarrow{u_1} = (-1;1;-1), \overrightarrow{u_2} = (2;-1;1),$$

Vector $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (0;1;1)$ vuông góc với cả hai vector trên. Vậy các mặt phẳng $(P), (Q)$ có cùng vector pháp $\overrightarrow{n} = (0;1;1)$ suy ra phương trình của chúng có dạng $y+z+d=0$

- Điểm $M(1;0;0) \in (d_1)$ nên nó cũng thuộc (P) suy ra $d=0$.
  Vậy mp (P) có phương trình $y+z=0$
- Tương tự như trên ta có $N(0;1;0) \in (Q)$ nên phương trình của (Q) là $y+z=1$

b) Vì $\overrightarrow{u_1} \neq k\overrightarrow{n_1}\ \ \forall k \neq 0$ nên $(d_1), (d_2)$ không song song với nhau. Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} \neq 0$ nên $(d_1), (d_2)$ không vuông góc với nhau. Ta cần chứng minh (d_1) không cắt (d_2).

Ta có $(d_1), (d_2)$ cắt nhau khi và chỉ khi tồn tại t, t' sao cho $\begin{cases} 1-t = 2t' \\ t = 1-t' \\ -t = t' \end{cases}$ nhưng hệ này vô nghiệm.

Vậy $(d_1), (d_2)$ chéo nhau.

Khoảng cách giữa $(d_1), (d_2)$ chính là khoảng cách giữa (P) và (Q) và bằng

$$d_{N/(P)} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Ta có $r = IA\sin\frac{A}{2} = IB\sin\frac{B}{2} = IC\sin\frac{C}{2} \Rightarrow r^3 = IA.IB.IC.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Do $pr = \dfrac{abc}{4R} = S$ nên

$$r = \frac{abc}{4Rp} = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{16R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{4R} \Rightarrow r^3 = IA.IB.IC.\dfrac{r}{4R} \Rightarrow IA.IB.IC = 4Rr^2.$

Câu V. Với mọi $x, y > 0$ ta có

$$\sqrt{x^2 + xy = y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.
Áp dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$P \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(a+b) + (b+c) + (c+a)\right] = 3$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.