Khối chuyên Toán - Tin trường ĐHKHTN-ĐHQGHN

Đề thi thử đại học lần 1 năm 2008-2009

Ngày thi: 15/2/2009

- *Thời gian: 180 phút.*
- *Typeset by LaTeX 2_ε.*

- *Email: nguyendunghus@gmail.com.*

1 Đề bài

Câu I (2 điểm). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 6$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.
Câu II (2 điểm)
1) Giải phương trình lượng giác

$$\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4\sin x + \cos x$$

2) Giải phương trình

$$2 + (1 - \log_3 x)\log_{\frac{2}{\sqrt{x}}} 4x^2 = (1 + \log_2 x)\log_{\frac{2}{\sqrt{x}}} 4x^2 + 2\log_3 \frac{3}{x}.\log_{2x} 2$$

Câu III (2 điểm)
1) Giải phương trình

$$\ln(2 + \sin 2x) = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Tính nguyên hàm

$$\int \frac{xdx}{\cos^4 x}$$

Câu IV (3 điểm). Cho hai đường tròn trên mặt phẳng tọa độ có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + 16 = 8x + 4y$.
1)a) Viết phương trình các đường tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình.
b) Tìm giao điểm của các tiếp tuyến.
2) Giả sử $x, y, u, v \in R$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1, u^2 + v^2 + 16 = 8u + 4v$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = 8u + 4v - 2(ux + vy)$$

Câu V (1 điểm). Tìm số các số tự nhiên gồm 8 chữ số phân biệt được thành lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9$ sao cho trong mỗi số không có bất kì hai chữ số chẵn nào đứng cạnh nhau.

2 Lời giải tóm tắt

Câu I.

1) Khi $m = 1$ thì $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 6$, $y' = 6(x-1)^2 \geq 0$ nên hàm số luôn đồng biến, $y'' = 12x - 12 \Rightarrow x_u = 1, y_u = 8$. (Bạn đọc tự vẽ đồ thị)

2) Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m = 6(x-1)(x-m)$.

- $m = 1 \Rightarrow y' \geq 0$, đồ thị chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm (không thỏa mãn)
- $m \neq 1$. Hàm số có cực trị nên đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow y_{max}.y_{min} = y(1).y(m) < 0$$
$$\Leftrightarrow (9m-1)(-2m^3 + 3m^2 + 6m) < 0$$
$$\Leftrightarrow m(9m-1)(-2m^2 + 3m + 6) < 0$$
$$\Leftrightarrow m < \frac{3-\sqrt{57}}{4},\quad 0 < m < \frac{1}{9},\quad m \geq \frac{3+\sqrt{57}}{4}$$

Câu II.

1) Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow (\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 2x - \cos x) + (2 - 4\sin x) = \cos 3x$$
$$\Leftrightarrow (2\cos 3x \sin x - \cos 3x) + \cos x(2\sin x - 1) - 2(2\sin x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos 3x + \cos x - 2) = 0$$

- $\sin x = \frac{1}{2}$
- $\cos 3x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = 1, \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$

2) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\log_2 2x - \log_3 \frac{3}{x})(2\log_{2x} 2 - \log_{\frac{2}{\sqrt{x}}} 4x^2) = 0$$

- $\log_2 2x = \log_3 \frac{3}{x} = t$. Phương trình này tương đương với

$$\begin{cases} 2x = 2^t \\ \frac{3}{x} = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{t-1} \\ x = 3^{1-t} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{t-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{t-1} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

- $\log_{2x} 4 - \log_{\frac{2}{\sqrt{x}}} 4x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1 + \log_2 x} = \dfrac{2 + \log_2 x}{1 - \frac{1}{2}\log_2 x}$.
  Đặt $\log_2 x = t$ ta thu được $(2-t) = (1+t)(2+t)t = 0, t = -4 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{1}{16}$

Câu III (2 điểm)

1) Phương rình đã cho tương đương với

$$ln(1 + (\sin x + \cos x)^2) = (\sin x + \cos x)^2$$

Đặt $t = (\sin x + \cos x)^2 \geq 0$.
Với $t > 0$ ta có $ln(1+t) < t$, thật vậy, xét hàm số

$$f(t) = ln1 + t - t < 0, f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 < 0$$

Suy ra $f(t)$ là hàm giảm suy ra $f(t) < f(0) \Rightarrow ln(1+t) - t < 0$, đpcm.
Với $t = 0 \Rightarrow ln(1+t) = t$ ta thu được phương trình tương đương

$$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos{(x - \frac{\pi}{4})} = 0 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

2) Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{xdx}{\cos^4 x} - \int x(1+\tan^2 x)d(\tan x) = \int xd(\tan x) + \int xd(\frac{\tan^3 x}{3}) \\
&= x\tan x - \int \tan x dx + \frac{x\tan^3 x}{3} - \frac{1}{3}\int \tan^3 x dx \\
&= x\tan x + \frac{x\tan^3 x}{3} + \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} - \frac{1}{3}\int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx \\
&= x\tan x + \frac{x\tan^3 x}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{1}{3}\int \tan x d(\tan x) \\
&= x\tan x + \frac{x\tan^3 x}{3} - \frac{2}{3}ln|\cos x| - \frac{\tan^2 x}{6} + C
\end{aligned}$$

Câu IV (3 điểm)
Câu (1) và (2) học sinh tự làm.
3) Ta có

$$\begin{aligned}
P - 15 &= 8u + 4v - 2ux - 2vy - 15 \\
&= (8u + 4v - 16) + 1 - 2ux - 2vy \\
&= u^2 + v^2 + x^2 + y^2 - 2ux - 2vy \\
&= (u-x)^2 + (v-y)^2 = d^2
\end{aligned}$$

Trong đó d là khoảng cách giữa hai điểm trên 2 đường tròn. Khoảng cách tâm bằng $\sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.
Suy ra $\begin{cases} d_{\max} = 2\sqrt{5} + 1 + 2 = 2\sqrt{5} + 3 \\ d_{\min} = 2\sqrt{5} - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{\max} = 15 + \left(2\sqrt{5}+3\right)^2 \\ P_{\min} = 15 + \left(2\sqrt{5}-3\right)^2 \end{cases}$

Câu V (1 điểm).

- Có C_3^6 cách lấy ra 3 ô không kề nhau, có 3! cách xếp 3 số chẵn, có 5! cách xếp 5 số lẻ. Suy ra số bộ 8 số thỏa mãn yêu cầu đề bài (có thể số 0 đứng đầu) bằng $d_1 = C_6^3 3!5!$
- Có C_5^2 cách lấy 2 ô không kề nhau từ vị trí $3 \to 8$ để điền 2 số chẵn khác 0 (chữ số 0 đứng đầu), suy ra số bộ có 8 chữ số có số 0 đứng đầu thỏa mãn yêu cầu đề bài bằng $d_2 = C_5^2 2!5!$
Đáp số: $d = d_1 - d_2 = 100.5!$