

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân, ThS Nguyễn Bá Đương, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

Phần chung cho tất cả thí sinh

Câu I.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị:

- Tập xác định: \mathbb{R} . Đồ thị có trục đối xứng là Oy
- $y' = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Ta có: $f(0) = 0; f(\pm 1) = -2$.

- $y'' = 24x^2 - 8 = 8(3x^2 - 1) \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{10}{9}$.

- Bảng biến thiên:

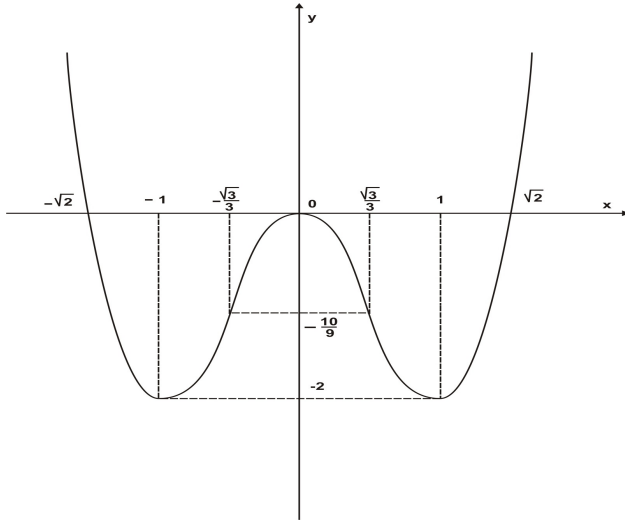
x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
y'	-	0	+	+	0	-	+
y''	+	+	0	-	-	0	+
y	$+\infty$	-2	$-\frac{10}{9}$	0	$-\frac{10}{9}$	-2	$+\infty$

- Đồ thị lõm trên $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$ và lõm trên $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1; y_{\min} = -2$ và đạt cực đại tại $x = 0; y_{\max} = 0$
- Vẽ đồ thị: đồ thị tiếp xúc Ox tại $(0; 0)$ và cắt Ox tại $(\pm \sqrt{2}; 0)$

Đề thi do các chuyên gia của công luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đương, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

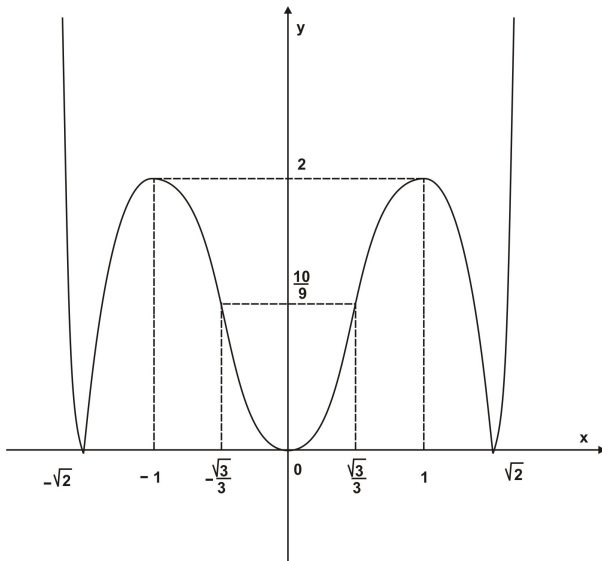


2. Phương trình tương đương với:

$$2x^2|x^2 - 2| = 2m$$

Từ đồ thị câu 1: $y = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$ có thể suy ra đồ thị:

$$y = 2x^2|x^2 - 2| = |2x^2(x^2 - 2)|$$



Phương trình có 6 nghiệm thực phân biệt

\Leftrightarrow đường thẳng $y = 2m$ có 6 điểm chung với đồ thị

$\Leftrightarrow 0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Câu II.

1. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đang, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 4x + 2k\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -4x + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy + x + 1 = 7y & (1) \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow xy + 1 = 7y - x$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow (xy + 1)^2 - xy = 13y^2$

$$\Leftrightarrow (7y - x)^2 - xy = 13y^2 \Leftrightarrow x^2 - 15xy + 36y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3y)(x - 12y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 12y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 12y \end{cases}$$

Với $x = 3y$ thì (1) trở thành $3y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Với $x = 12y$ thì (1) trở thành $12y^2 + 5y + 1 = 0$: vô nghiệm vì $\Delta = -23 < 0$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x, y) là $(3; 1)$ và $\left(1; \frac{1}{3}\right)$

Câu III.

Đặt $u = 3 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$$

Đề thi do các chuyên gia của công luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

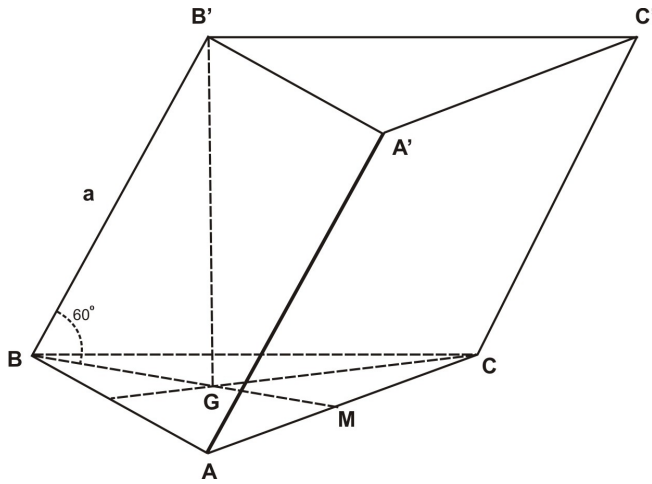
Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đăng, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{3 + \ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} \\
 &= -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{3 - \ln 3}{4} + \left(\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \ln \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu IV

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow B'G \perp (ABC)$



$$B'G = \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$BG = a \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{Ta có } BG = \frac{2}{3}BM$$

$$\Rightarrow BM = \frac{3BG}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Góc } \hat{BAC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AC = 2BM = a\sqrt{3}, \quad BC = AC \tan 60^\circ = 3a$$

$$\Rightarrow dt_{ABC} = \frac{1}{2}BCAC = \frac{3a \cdot a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{3 \cdot 2} = \frac{3a^3}{2}$$

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân, ThS Nguyễn Bá Đăng, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

Câu V

Đặt $S = x + y; P = xy$ thì $S^2 \geq 4P$.

Từ giả thiết:

$$\Rightarrow S^3 + S^2 \geq S^3 + 4P \geq 2 \Rightarrow S^3 + S^2 - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (S-1)(S^2 + 2S + 2) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 1.$$

Suy ra $t = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}S^2 \geq \frac{1}{2}$.

Ta có:

$$A = 3(x^2 + y^2)^2 - 3(xy)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\geq 3(x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1.$$

Vì hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$ nên $A \geq f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$.

$$A = \frac{9}{16} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn giả thiết)}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = \frac{9}{16}.$$

Phần riêng

A. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a

1. Phương trình 2 đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là:

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x-7y}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{hay } d_1 : 2x + y = 0; \quad d_2 : x - 2y = 0.$$

Tâm K của (C_1) là giao của d_1 hoặc d_2 với đường tròn (C) .

Toạ độ K là nghiệm của hệ:

$$(I) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ hoặc } (II) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Hệ (I) vô nghiệm.

$$\text{Hệ (II) có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đương, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

$$\text{Vậy } K \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{Bán kính của } (C_1) \text{ là } R_1 = d(K; \Delta_1) = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

2. Có 2 trường hợp:

- Trường hợp 1: Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD

$$\text{Ta có } AB = (-3; -1; 2) \text{ và } CD = (-2; 4; 0)$$

$$\Rightarrow \text{vector pháp tuyến của (P) là: } n_{(P)} = [AB, CD] = (-8; -4; -14)$$

\Rightarrow Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$4(x-1) + 2(y-2) + 7(z-1) = 0$$

$$\text{Hay: } 4x + 2y + 7z - 15 = 0$$

- Trường hợp 2: Mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm: A, B và trung điểm M của CD

$$\text{Ta có: } M(1; 1; 1)$$

$$\Rightarrow AM = (0; -1; 0)$$

$$\Rightarrow \text{Vector pháp tuyến của (P) là: } n = [AB, AM] = (2; 0; 3)$$

$$\Rightarrow \text{Pthình (P): } 2(x-1) + 0(y-2) + 3(z-1) = 0$$

$$\text{Hay: } 2x + 3z - 5 = 0$$

Kết luận: có 2 mặt phẳng (P) thoả mãn yêu cầu bài toán là:

$$4x + 2y + 7z - 15 = 0$$

$$\text{Và: } 2x + 3z - 5 = 0.$$

Câu VII.a

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\begin{cases} |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \\ z \cdot \bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(a-2) + (b-1)i| = \sqrt{10} \\ (a+bi)(a-bi) = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b-1)^2 = 10 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ -4a - 2b + 5 + 25 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 2a + b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ b = 10 - 2a \end{cases} \Rightarrow (10 - 2a)^2 + a^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 40a + 75 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 + 4i \\ z = 5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}$$

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đương, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b

1. Khoảng cách từ A đến BC = $\frac{|-1-4-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} B(x_B; x_B - 4) \\ C(x_C; x_C - 4) \end{cases} \Rightarrow BC^2 = (x_B - x_C)^2 + (x_B - x_C)^2$$

$$BC = \sqrt{2}|x_B - x_C|$$

$$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}|x_B - x_C|}{2} = 18$$

$$\Rightarrow |x_B - x_C| = 4;$$

$$AB = AC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_B + 1)^2 + (x_B - 8)^2 = (x_C + 1)^2 + (x_C - 8)^2 \\ |x_B - x_C| = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} x_B = \frac{11}{2} \Rightarrow y_B = \frac{3}{2} \\ x_C = \frac{3}{2} \Rightarrow y_C = \frac{-5}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_C = \frac{11}{2} \Rightarrow y_C = \frac{3}{2} \\ x_B = \frac{3}{2} \Rightarrow y_B = \frac{-5}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

2. Gọi d là đường thẳng qua A, song song với (P)

\Rightarrow d nằm trên mp (Q) qua A song song với (P).

\Rightarrow (Q): $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Đường thẳng Δ qua B, vuông góc với (Q): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Tìm được giao điểm của (Q) và Δ là C $\left(\frac{-1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AC cần tìm là:

$$\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$$

Đề thi do các chuyên gia của công luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.

Xem chi tiết tại <http://web.abcdonline.vn>

Giáo viên giải đề: TS Lê Thống Nhất, ThS Hoàng Trung Quân, ThS Đặng Văn Quân,
ThS Nguyễn Bá Đương, Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hào

Câu VII.b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị thoả mãn

$$\text{PT: } -x + m = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + mx = x^2 - 1 (x \neq 0) \Leftrightarrow 2x^2 + mx - 1 = 0 \quad (1).$$

PT(1) có $ac = -2 < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 0 < x_2$.

Khi đó $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$\text{Ta có } AB = 4 \Leftrightarrow AB^2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

(vì theo định lý Viét thì $x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}$ và $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$)

Vậy $m = \pm 2\sqrt{6}$.