**Câu I.** 1), 2) Bạn hãy tự giải nhé!

3) Trước hết, lập phương trình đường thẳng qua A ($x_o$ , 0) có hệ số góc bằng k: $y = k(x - x_o)$.

Hoành độ tiếp điểm của đường thẳng $y = k(x - x_o)$ với đồ thị hàm số ở phần 1) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2} = k(x - x_o) \quad (1) \\ \dfrac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2} = k \qquad (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1) ta được $(1 - x_o)x^2 + 2(3 - 2x_o)x + 6 - 5x_o = 0 \ (x \neq -2)$ (3)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (3) có nghiệm duy nhất $\neq -2$.

· $x = -2$ : (3) trở thành : $x_o = -2$. Khi đó nghiệm kia của (3) là $x = \dfrac{6 - 5x_o}{(1 - x_o)x_o} = -\dfrac{8}{3}$

● $1 - x_o = 0$ : (3) trở thành $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

● $\Delta' = (3 - 2x_o)^2 - (1 - x_o)(6 - 5x_o) = 0$

$\Leftrightarrow x_o^2 + x_o - 3 = 0 \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

*Kết luận :* Có 4 điểm : (-2 , 0) ; (1 , 0);

$\left(\dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 0\right)$ và $\left(\dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}, 0\right)$.

**Câu II.** 1) $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a + b)^2 - c^2] > 0$

$\Leftrightarrow a(b - c - a)(b - c + a) + b(c - a - b)(c - a + b) + c(a + b - - c)(a + b + c) > 0$

$\Leftrightarrow (a + b - c)[a(b - c - a) + b(a - b - c) + c(a + b + c)] > 0$

$\Leftrightarrow c^2 - (a^2 + b^2) + 2ab > 0 \Leftrightarrow c^2 - [a^2 + b^2 - 2ab] > 0 \Leftrightarrow$

$c^2 > (a - b)^2 \Leftrightarrow c > |a - b|$.

Bất đẳng thức sau cùng đúng vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

2) Dễ nhận thấy rằng $12 + 0{,}5\sin y \leq 12{,}5$.

Mặt khác:

$$A = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = (\cos^4 x + \sin^4 x) + \left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x}\right) + 4 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{16}\sin^4 2x} + 4 = 5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{8(2 - \sin^2 2x)}{\sin^4 2x}$$

$(0 < \sin^2 2x \leq 1)$. Nhận thấy rằng khi $\sin^2 2x$ tăng thì A giảm, do đó khi $\sin^2 2x = 1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 12,5.

Vậy ta có kết quả : (x , y) là nghiệm của phương trình ban đầu khi và chỉ khi (x , y) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \end{cases} (k, m \in \mathbf{Z}).$$

**Câu III.** 1) Xét a = 0. Lúc đó phương trình có dạng :

$$\sqrt[3]{x^2} + m\sqrt[3]{x^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2}. \quad (*)$$

Dù m nhận giá trị nào đó thì (*) vẫn thỏa mãn với mọi x.

Xét $a \neq 0$ ; Khi đó số x = a không phải là nghiệm, ta có thể chia hai vế cho $\sqrt[3]{(x - a)^2}$ và được :

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x + a}{x - a}\right)^2} + m = (m+1)\sqrt[3]{\frac{x + a}{x - a}}.$$

Đặt $t = \sqrt[3]{\frac{x + a}{x - a}}$ thì sẽ có : $t^2 - (m + 1)t + m = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$ ; $t_2 = m$.

a) $\frac{x+a}{x-a} = 1$ : vô nghiệm (do $a \neq 0$).

b) $\frac{x+a}{x-a} = m^3$. Điều kiện $x \neq a$.

Ta có $x + a = m^3(x - a)$ hay $(m^3 - 1)x = (m^3 + 1)a$. (**)

Nếu $m \neq 1$ thì $x = \left(\frac{m^3 + 1}{m^3 - 1}\right)a$.

Nếu $m = 1$ thì (**) vô nghiệm (vì $a \neq 0$).

*Kết luận :*

Nếu $a = 0$ thì với mọi m, phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Nếu $a \neq 0$ ; $m \neq 1$ : phương trình có nghiệm duy nhất : $x = \left(\frac{m^3 + 1}{m^3 - 1}\right)a$.

Nếu $a \neq 0$ ; $m = 1$ : phương trình vô nghiệm.

2) Ta có : $0 \leq (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) == 1 + 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow \quad xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}$.

Mặt khác lại có:

$0 \leq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 == 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) == 2 - 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq 1$.

**Câu IVa.**

$$I=\int_0^1\frac{dx}{[(x+1)(x+2)]^2}=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)^2dx\ =\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}+\int_0^1\frac{dx}{(x+2)^2}-2\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}+2\ln 3-4\ln 2$$

**Câu Va.**

1) Giả sử $D(x_o, y_o)$ thuộc $(\Delta)$ sao cho A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa. Khi đó ta có :

$\overrightarrow{CA}=k\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{DA}=-k\overrightarrow{DB}$ ;

$\overrightarrow{CA}=(-1/2\ ;-1)$, $\overrightarrow{CB}=(3/2\ ;3)\Rightarrow k=-\frac{1}{3}$ ;

$\overrightarrow{DA}=(-x_o\ ;-1-y_o)=\frac{1}{3}(2-x_o\ ;3-y_o)=\ =\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\Rightarrow\begin{cases}x_o=-1\\y_o=-3,\end{cases}$

vậy D(−1, −3) là điểm phải tìm.

2) Gọi tọa độ của điểm M là $(x_o, y_o)$ ta có

$M\in\Delta\Rightarrow 2x_o-y_o-1=0.$ (1)

$\overrightarrow{EM}=(x_o-1\ ;y_o-6)$, $\overrightarrow{FM}=(x_o+3\ ;y_o+4)$

Do đó $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{FM}=(2x_o+2\ ;2y_o-2)$ và

$\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{FM}\right|=2\sqrt{(x_o+1)^2+(y_o-1)^2}$

$=2\sqrt{(x_o+1)^2+4(x_o-1)^2}$ (do (1))

$=2\sqrt{5x_o^2-6x_o+5}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{FM}\right|_{min}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$, đạt được tại $x_o=\frac{3}{5}$, $y_o=\frac{1}{5}$. Điểm cần tìm là $M\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

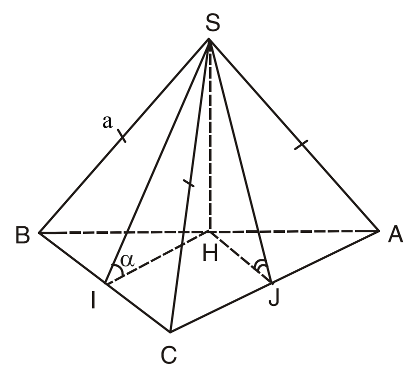
**Câu IVb.**

1) Do $\widehat{BSC}=60^o$ nên SBC là tam giác đều và vì vậy BC = a. Do ASC là tam giác vuông cân nên $AC=a\sqrt{2}$.

Còn ABS là tam giác cân có góc ở đỉnh là $120^o$ nên $AB=a\sqrt{3}$.

Để ý rằng $AB^2=AC^2+CB^2$ nên $\widehat{ACB}=90^o$.

2) Do SA = SB = SC = a nên H cách đều A, B, C. Do $\widehat{ACB}=90^o$ nên H là trung điểm của AB.




3) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC.

Ta có : $r=\frac{3V}{S}$,

trong đó V là thể tích, S là diện tích toàn phần của SABC. Ta dễ dàng tính được

$S=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$=\frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$

$$V = \frac{1}{3}SH.dt(ABC) = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Vậy

$$r = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}\right).$$

4) Rõ ràng góc phẳng của nhị diện cạnh AB bằng $90^o$. Gọi I là trung điểm của BC thì $HI \perp BC$ và

$$tg\widehat{SIH} = \frac{SH}{IH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tương tự $tg\widehat{SJH} = \frac{SH}{JH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1$. Vậy $\widehat{SJH} = 45^o$.