Câu 1

1) Bạn đọc tự giải nhé!
2) Lấy A(0, b) là một điểm trên Oy. Đường thẳng qua A, với hệ số góc k có phương trình :
y = kx + b.

Ta có $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x-1}$; $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

Hoành độ tiếp điểm của đường thẳng y = kx + b với đồ thị (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x-1} = kx + b \\ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{1}{x-1} = \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right]x + b$$

$$\Rightarrow \ bx^2 - 2(1+b)x + (1+b) = 0 \quad (1)$$

• b = 0 : (1) trở thành −2x + 1 = 0 ⇔ $x = \frac{1}{2}$

• $b \neq 0$: (1) có nghiệm khi

$$\Delta' = (1+b)^2 - b(1+b) \geq 0 \iff b \geq -1 \ (b \neq 0)$$

Thành thử các điểm trên Oy từ đó có thể được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) là các điểm có tung độ $b \geq -1$.

3) Hoành độ tiếp điểm của parabol $y = x^2 + a$ với đồ thị (C) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x-1} = x^2 + a_o \\ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 2x \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, suy ra :

$$x(2x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Thay vào phương trình đầu thì được a = - 1.

Câu II. Đặt S = x + y, P = xy, ta đi đến hệ :

$$\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = m \end{cases}$$

1) Với m = 5 ta được :

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 5 - S \Rightarrow S^2 + 2S - 15 = 0$$

$$\Rightarrow S = -5, \quad S = 3.$$

Với S = −5, ta có P = 10, loại vì điều kiện $S^2 \geq 4P$ không được nghiệm đúng.

Với S = 3, ta có P = 2 và được $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

2) Trong trường hợp tổng quát, P = m - S ⇒

$$S^2 + 2S - 3m = 0.$$

Để phương trình có nghiệm, cần phải có :

$$\Delta' = 1 + 3m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{3}.$$

Khi đó gọi S_1 và S_2 là các nghiệm :

$$S_1 = -1 - \sqrt{1+3m}, \quad S_2 = -1 + \sqrt{1+3m}.$$

a) Với $S = S_1 \Rightarrow P = m - S_1$, điều kiện $S^2 \geq 4P$ trở thành

$$(1+\sqrt{1+3m})^2 \geq 4(m+1+\sqrt{1+3m}) \Rightarrow -(m+2) \geq 2\sqrt{1+3m},$$

không được nghiệm vì $m \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow m + 2 > 0$.

b) Với $S = S_2 \Rightarrow P = m - S_2$, điều kiện $S^2 \geq 4P$ trở thành :

$$(-1+\sqrt{1+3m})^2 \geq 4(m+1-\sqrt{1+3m}) \Rightarrow 2\sqrt{1+3m} \geq m+2.$$

Vì m + 2 > 0, có thể bình phương hai vế của bất phương trình này và đi đến

$$0 \geq m^2 - 8m \Rightarrow 0 \leq m \leq 8.$$

Cùng với $m \geq -\frac{1}{3}$ suy ra đáp số : $0 \leq m \leq 8$.

Câu III. 1) Hiển nhiên với x = 0 bất phương trình được nghiệm với mọi y. Xét x > 0 ⇒

$$\cos y + \sin y \geq -\frac{1+x^2}{2x}.$$

Hàm f (y) = cosy + siny có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$, giá trị nhỏ nhất bằng $-\sqrt{2}$, vậy phải có :

$$-\sqrt{2} \geq -\frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq \sqrt{2} - 1, \quad x \geq \sqrt{2} + 1.$$

Xét $x < 0 \Rightarrow \cos y + \sin y \leq -\frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq -\frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} - 1,$$

$$-\sqrt{2} + 1 \leq x < 0.$$

Tóm lại các giá trị phải tìm là :

$$x \leq -\sqrt{2} - 1, \quad -\sqrt{2} + 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1, \quad \sqrt{2} + 1 \leq x$$

hay :

$$|x| \geq \sqrt{2} + 1, \quad |x| \leq \sqrt{2} - 1$$

2) Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được phương trình tương đương :

$$tg^2x(tgx+1) = 3tgx(1-tgx) + 3(1+tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow tg^2x(tgx+1) - 3(tgx+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (tgx+1)(tg^2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ tgx = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Câu IVa. Cần để ý rằng các đường thẳng (D), (D’) vuông góc với nhau và chúng có phương trình tham số

(D) : $\begin{cases} x = bt \\ y = at \end{cases}$ (D’) : $\begin{cases} x = at' \\ y = -bt' \end{cases}$

1) Thay biểu thức của (D) vào phương trình của (E), ta được các giá trị của tham số t ứng với các giao điểm M, N. Từ đó suy ra chẳng hạn (do có sự trao đổi vai trò của M, N):

$$M\left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2+4b^2}}, \frac{6a}{\sqrt{9a^2+4b^2}}\right),\ N\left(-\frac{6b}{\sqrt{9a^2+4b^2}}, -\frac{6a}{\sqrt{9a^2+4b^2}}\right)$$

Tương tự:

$$P\left(\frac{6a}{\sqrt{4a^2+9b^2}}, -\frac{6b}{\sqrt{4a^2+9b^2}}\right),\ Q\left(-\frac{6a}{\sqrt{4a^2+9b^2}}, \frac{6b}{\sqrt{4a^2+9b^2}}\right)$$

2) Tứ giác MPNQ là hình thoi, với diện tích

$$S = 2OM.OP = \frac{72(a^2+b^2)}{\sqrt{(9a^2+4b^2)(4a^2+9b^2)}}. \qquad (1)$$

3) Để ý rằng các phương trình của (D) và (D’) có dạng *thuần nhất* (hay đẳng cấp) đối với a, b, tức là thay cho a và b, ta viết ka và kb với $k \neq 0$. Do vậy, có thể coi rằng $a^2 + b^2 = 1$. Khi đó (1) trở thành

$$S = \frac{72}{\sqrt{(4+5a^2)(4+5b^2)}} = \frac{72}{\sqrt{36+25a^2b^2}} \leq \frac{72}{6} = 12,$$

dấu = chỉ có thể xảy ra khi ab = 0, tức là hoặc a = 0 hoặc b = 0. (Khi đó cặp đường thẳng (D) và (D’) trùng với cặp hệ trục tọa độ).

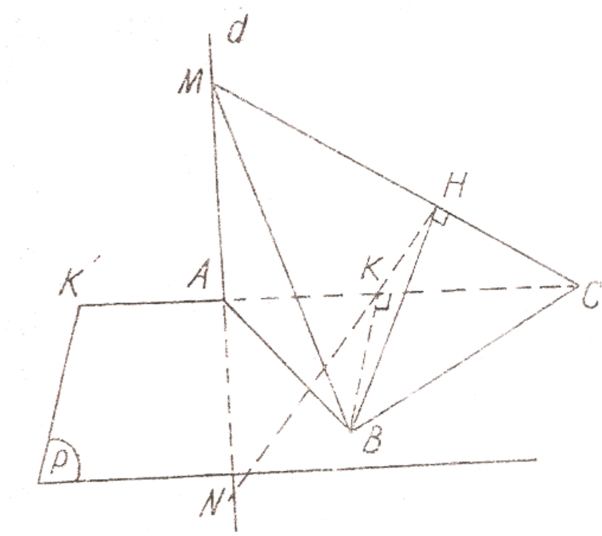
4) Vẫn với giả thiết $a^2 + b^2 = 1$, theo trên ta có

$$S = \frac{72}{\sqrt{36+25a^2b^2}}$$

Vì $2|ab| \le a^2 + b^2 = 1$ suy ra $a^2b^2 \le \frac{1}{4}$, dấu = chỉ xảy ra khi $|a| = |b|$, vậy $S \ge \dfrac{72}{\sqrt{36 + \frac{25}{4}}} = \dfrac{144}{13}$,

suy ra min $S = \dfrac{144}{13}$, xảy ra khi $|a| = |b|$, tức là cặp đường thẳng (D), (D') là cặp các phân giác $y \not\subset x = 0$ của hệ trục tọa độ Oxy.

Câu IVb. (Hình bên)



1) $BK \perp AC$, $BK \perp AM \Rightarrow BK \perp (ACM) \Rightarrow BK \perp CM$.

Cùng với $BH \perp CM$, suy ra $(BKH) \perp CM \Rightarrow BN \perp CM$.

2) Do $(BKH) \perp CM \Rightarrow KH \perp CM$. Vậy K là trực tâm tam giác CMN, và ta được $MK \perp CN$. Cùng với $BK \perp CN \Rightarrow (BMK) \perp CN \Rightarrow BM \perp CN$.

3) Vì K là trực tâm tam giác CMN, nên AM.AN = AK.AC

Vậy khi M di chuyển trên d, tích AM.AN không đổi ⇒ MN = = AM + AN nhỏ nhất khi AM = AN. Khi đó

$AM^2 = AK.AC$, AM là đường cao trong tam giác vuông CMK', cạnh huyền CK', K' là điểm đối xứng của K qua A.