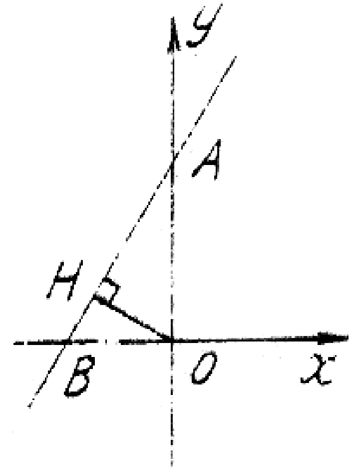
Câu I. 1) Bạn hãy tự giải nhé!

2) Hàm số đã cho có thể viết dưới dạng:

$$y = -x\cos\alpha + 2(\cos\alpha - \sin\alpha) - \frac{4(\cos\alpha - \sin\alpha) + 1}{x + 2}.$$



Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $4(\cos\alpha - \sin\alpha) + 1 \neq 0$ và $\cos\alpha \neq 0$.

Phương trình tiệm cận xiên là $y = -x\cos\alpha + 2(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

Tiệm cận xiên của đồ thị cắt trục tung tại điểm A(0 , 2(cosa - sina)) và cắt trục hoành tại điểm B (2(1 - tga) , 0). Khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên (chính là bán kính đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên) là h = OH :

$$h = \frac{OA\ .\ OB}{AB} = \frac{|4(\cos\alpha - \sin\alpha)(1 - \mathrm{tg}\alpha)|}{\sqrt{4[(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + (1 - \mathrm{tg}\alpha)^2]}} =$$

$$= \frac{2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{|\cos\alpha|\sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 3}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{(\mathrm{tg}\alpha - 1)^2}{2(\mathrm{tg}^2\alpha + 2)}} = 2\sqrt{\frac{(\mathrm{tg}\alpha - 1)^2}{\mathrm{tg}^2\alpha + 2}}.$$

Đường tròn tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên có bán kính lớn nhất khi h lớn nhất.

Đặt $\mathrm{tg}\alpha = t$, ta có $h = 2\sqrt{\dfrac{(t - 1)^2}{t^2 + 2}}$.

h đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $f(t) = \dfrac{(t - 1)^2}{t^2 + 2}$ đạt giá trị lớn nhất.

$f'(t) = \dfrac{2(t - 1)(t + 2)}{(t^2 + 2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = 1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy f(t) đạt giá trị lớn nhất khi t = - 2 và giá trị lớn nhất đó bằng $f(-2) = \dfrac{3}{2}$ và $h_{max} = \sqrt{6}$.

Khi đó $\mathrm{tg}\alpha = -2 = \mathrm{tg}\varphi$ với $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0$.

Vậy $\alpha = \varphi + k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Câu II. 1) Ta viết phương trình dưới dạng

$$2\cos^2 x + \cot g^2 x = \sin x + 1 + \cot g^2 x$$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) = \sin x + 1 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0.$

Giải $2\sin x - 1 = 0$ ta cã $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Với x_1 các nghiệm thỏa mãn $2 \le x \le 40$ ứng với $k = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$.

Tính theo cách tìm tổng của cấp số cộng có số hạng đầu là 13p/6, số hạng cuối là 73p/6, công sai là 2p ; ta có:

Tổng các nghiệm x của họ x_1 thỏa mãn điều kiện bài toán là 43p

Tương tự, tổng các nghiệm x của họ x_2 thỏa mãn điều kiện bài toán là 35p.

Giải $\sin x + 1 = 0$ ta có họ $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$.

Tương tự, tổng các nghiệm thuộc họ đó thỏa mãn điều kiện bài toán là 39π.

Kết quả : Tổng tất cả các nghiệm x của phương trình đã cho thỏa mãn $2 \le x \le 40$ là

$43\pi + 35\pi + 39\pi = 117\pi$.

2) Với a = 0, ta có:

$\log_2(\sqrt{6 - x}) = \log_2(3 - \sqrt{x - 1})$.

Điều kiện : $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 3 - \sqrt{x - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 6.$

Ta có $\sqrt{6 - x} = 3 - \sqrt{x - 1}$. (1)

Với điều kiện trên , ta có

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} + \sqrt{6 - x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)(6 - x)} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ hoặc $x_2 = 5$.

Với $x_1 = 2$, ta có $\log_2(2 - 12a^2) = \log_{2+a^2} 2$ không đúng với mọi giá trị của a

Chẳng hạn khi $a^2 = \frac{1}{12}$ vế trái bằng 0 còn vế phải bằng $\log_{2+(1/12)} 2 \neq 0$.

Với $x_2 = 5$, ta có $\log_2(125a^2 - 125a^2 + 1) = \log_{2+a^2} 1$ đúng với mọi a.Kết luận : $x = 5$.

Câu III. 1) Vì a, b, c, d lập thành một cấp số cộng, ta có: $a + d = b + c$.

Biến đổi : $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 = [x^2 - (a + d)x + ad][x^2 - (b + c)x + bc] + m^2 =$

$= (t + ad)(t + bc) + m^2 = t^2 + (ad + bc)t + m^2 + adbc = f(t)$

(với $t = x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$).

Xét tam thức bậc hai f(t). Ta thấy khi lấy m sao cho
$2m \geq | ad - bc |$, ta có $4m^2 \geq (ad - bc)^2$

Mặt khác, biệt thức $\Delta = (ad + bc)^2 - 4m^2 - 4abcd = (ad - bc)^2 - 4m^2$.

Do đó $\Delta \leq 0$, $f(t) = t^2 + (ad + bc)t + m^2 + abcd \geq 0$ với mọi t.

Đó là điều phải chứng minh.

2) Gọi A là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Ta có

$$A = \left|\frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b^2 - c^2}{bc} + \frac{c^2 - a^2}{ca}\right| =$$

$$= \frac{1}{abc}\left|c(a^2 - b^2) + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2)\right| =$$
$$= \frac{|(a - b)(b - c)(c - a)|}{abc}.$$

Vì a, b, c là các độ dài cạnh của một tam giác, nên

$| a - b | < c$, $| b - c | < a$, $| c - a | < b$; suy ra $A < 1$.

Câu IVa.

Nguyên hàm $I=\int\frac{\sin\alpha\cos x+\sin x\cos\alpha}{\cos^2 x}dx\ =\sin\alpha\int\frac{dx}{\cos x}+\cos\alpha\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\sin\alpha\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{\cos\alpha}{\cos x}+C$$

Câu Va.

1) $x^2+y^2-(m-2)x+2my-1=0$.

Ta có :

$$B^2+C^2-4AD=(m-2)^2+(2m)^2+4>0$$

với mọi m nên phương trình này là phương trình của đường tròn thực.

Tọa độ tâm I của đường tròn là :

$$\begin{cases}x=a=\dfrac{m-2}{2}\\ y=b=-\dfrac{2m}{2}=-m\end{cases}\Rightarrow 2x+y+2=0$$

Vậy tập hợp tâm I là đường thẳng 2x + y + 2 = 0.

2) Ph-¬ng tr×nh cña ®-êng trßn cã thÓ viÕt l¹i d-íi d¹ng : $(x-2y)m=x^2+y^2+2x-1$.

Vậy tọa độ các điểm cố định mà đường tròn đi qua là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}x-2y=0\\ x^2+y^2+2x-1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}\ \text{hoặc}\ \begin{cases}x=2/5\\ y=1/5\end{cases}$$

Như vậy các đường tròn này đều đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi :

$$A_1(-2,-1)\ \text{hoặc}\ B_1(2/5,\ 1/5)$$

3) Khi m = −2, đường tròn có phương trình là

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0$$

có tâm I(−2, 2) và bán kính R = 3.

Đường thẳng (Δ) đi qua A(0, −1) và không song song với trục tung có phương trình là

y + 1 = kx hay kx − y − 1 = 0.

Khoảng cách từ (Δ) đến I là

$$d=\left|\frac{-2k-2-1}{\sqrt{k^2+1}}\right|=\left|\frac{-2k-3}{\sqrt{k^2+1}}\right|.$$

Để (Δ) tiếp xúc với (C_{-2}) thì :

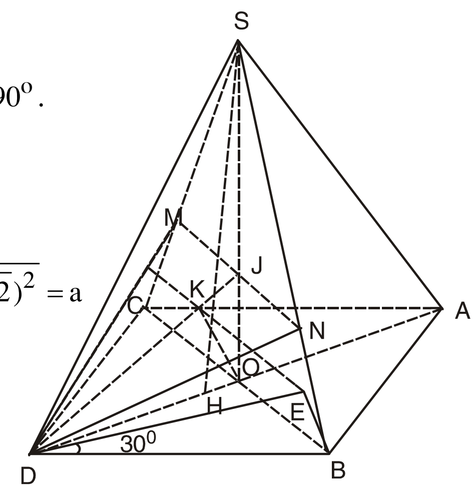
$$d=R\Leftrightarrow\left|\frac{-2k-3}{\sqrt{k^2+1}}\right|=3\Leftrightarrow k=0,\ k=\frac{12}{5}.$$

Vậy các tiếp tuyến với đường tròn (C_{-2}) xuất phát từ A(0, −1) là

$\Delta_1 : y + 1 = 0,$

$\Delta_2 : 12x - 5y - 5 = 0.$

Câu IVb.



1) Theo giả thiết

$$CS = CA = a,\ SA = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 90^o.$$

Tương tự $\widehat{SBA} = 90^o$. Vậy $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Vì OS = OA nên $\widehat{DSA} = 90^o \Rightarrow$

$$\Rightarrow SD = \sqrt{AD^2 - SA^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$$

ABCD là hình thoi $\Rightarrow$ BD = CD = a.

Vậy SBCD là tứ diện đều cạnh a.

3) Thiết diện là tam giác DMN có MN // BC.

Hạ $OK \perp DJ$; vì $OK \perp MN$ ($OK \in (SAD) \perp BC$, $BC // MN) \Rightarrow OK \perp (DMN)$. Tịnh tiến OK để O trùng với B. Khi đó E là hình chiếu của B trên thiết diện

$\Rightarrow \widehat{BDE} = 30^o \Rightarrow BE = OK = \frac{a}{2}$

Đặt $\widehat{JOD} = \alpha$, $\widehat{JDO} = \beta$.

áp dụng định lí hàm số sin ta có

$$\frac{DJ}{\sin\alpha} = \frac{JO}{\sin\beta} = \frac{DO}{\sin(\alpha+\beta)} \quad (*)$$

(vì $\sin(180^o - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$).

Ta có $\cos\alpha = \frac{OH}{OS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (α nhọn), $\sin\beta = \frac{OK}{OD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (β nhọn).

Thế vào (*), ta được $DJ = \frac{3a\sqrt{2}}{5}$, $OJ = \frac{3a\sqrt{3}}{10}$.

Từ đó : $MN = BC.\frac{SJ}{SO} = BC.\frac{SO - JO}{SO} = \frac{2a}{5}$

Vì $MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp DJ \subset (SAD)$ nên DJ là đường cao thiết diện. Vậy

$$S_{td} = \frac{1}{2}MN.DJ = \frac{1}{2}.\frac{2a}{5}.\frac{3a\sqrt{2}}{5} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{25}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = (c-x)^{n-1} \quad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta xét 2 trường hợp : n chẵn và n lẻ.