Câu I.

1) $y'=\dfrac{-12x^2-6mx+m^2-16}{(4x+m)^2}$; $y'(0)=\dfrac{m^2-16}{m^2}(m\neq 0)$.

Muốn tiếp tuyến tại x = 0 vuông góc với tiệm cận đứng thì y' (0) = 0 ⇒ $m^2-16=0$ ⇒ m = ± 4.

Tiệm cận xiên có hệ số góc $k=-\dfrac{3}{4}$. Muốn tiếp tuyến tại x = 0 vuông góc với tiệm cận xiên thì

$$k.\ y'(0)=-1 \Rightarrow\ k.\frac{m^2-16}{m^2}=-1\ \Rightarrow\ \frac{3}{4}.\frac{m^2-16}{m^2}=1,$$

phương trình này vô nghiệm.

Vậy tiếp tuyến tại x = 0 chỉ vuông góc với tiệm cận đứng khi $m=\pm 4$.

2) Xét phương trình :

$$x^4+hx^3+x^2+hx+1=0.$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}(*)\quad (|t|\geq 2)$

thì sẽ có phương trình

$$t^2+ht-1=0$$

Phương trình này luôn có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $t_1<0<t_2$.

Để có không ít hơn hai nghiệm âm khác nhau thì cần và đủ là $t_1<-2$ (do (*)). Điều đó dẫn đến $f(-2)<0 \Leftrightarrow h > \dfrac{3}{2}$.

(Đặt $f(t)=t^2+ht-1$)

Câu II.

1) $\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^2=$

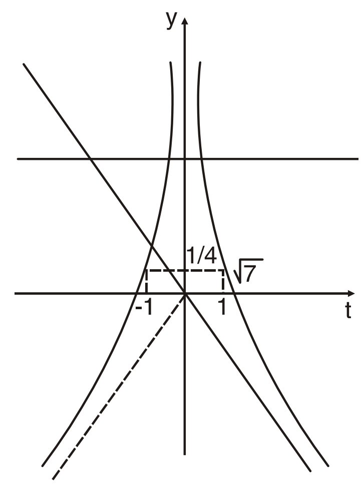
$=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)=$

$=1-3\sin^2x\cos^2x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x$.

Đặt t = sin2x, $|t|=|\sin 2x|\leq 1$, ta được :

$$3t^2+4a|t|-4=0\qquad (|t|\leq 1)$$

$$\Rightarrow\quad a=\frac{4-3t^2}{4|t|}\ \text{với } |t|\leq 1.\qquad (1)$$



Hàm số (1) là hàm chẵn. Đồ thị đối xứng qua trục Oy.

y (1) = $\dfrac{1}{4}$, vậy đường thẳng y = a chỉ cắt đồ thị hàm số trong [−1 ; 1] khi a ≥ $\dfrac{1}{4}$.

Vậy khi a ≥ $\dfrac{1}{4}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2) $y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$.

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình y' = 0 phải có nghiệm $\Rightarrow$ $\sqrt{3}\cos x - \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

và $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{2} + 2k\pi$

$y'' = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Rightarrow$ $y''(x_1) = -\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\sqrt{3} < 0$.

Vậy tại $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ hàm số đạt cực đại :

$$y(x_1) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi(1 + 4k)}{2} \quad \text{với } k \in \mathbf{Z}$$

($y''(x_2) = \sqrt{3} > 0$ $\Rightarrow$ tại x_2 hàm số đạt cực tiểu).

Câu III.

1) Đáp số $x \le -\frac{13}{6}$, $x \ge 3$.

2) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

(Chú ý rằng $y \ge 0$, $2 \le x \le 4$)

$$\Leftrightarrow y^2 = x - 2 + 4 - x + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)},$$

Vì $(x - 2) + (4 - x) = 2$ nên $(x - 2)(4 - x)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $x - 2 = 4 - x \Rightarrow x = 3$;

$$y^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \le 2 + 2\left(\frac{x - 2 + 4 - x}{2}\right) = 4.$$

Vậy $0 \le y \le 2$; tức là giá trị lớn nhất của hàm số là 2 và đạt tại $x = 3$.

Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ tương đương với $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = (x-3)^2 + 2$.

Vế trái luôn ≤ 2, còn vế phải luôn ≥ 2 nên để phương trình có nghiệm thì phải có

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ (x-3)^2 + 2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

thỏa mãn điều kiện $2 \le x \le 4$.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu Iva.

1) $x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = m(m - 2a)$.

Để có phương trình đ ờng tròn C_m (tâm (m ; 0)), phải có

$m(m - 2a) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2a \end{array}\right.$

2) Ta tính phương tích của các điểm O, A đối với đường tròn C_m:

$P_{O/C_m} = F(0, 0) = 2ma$,

$P_{A/C_m} = F(2a, 0) = 2a(2a - m)$,

$\Rightarrow P_{O/C_m} \times P_{A/C_m} = 4a^2m(2a - m) < 0$ (vì $m < 0$, $m > 2a$).

Vậy trong hai điểm O, A, có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài C_m, thành thử đoạn OA cắt C_m.

3) Lấy hai đường tròn C_{m_1} và C_{m_2} bất kì ($m_1 \neq m_2$).

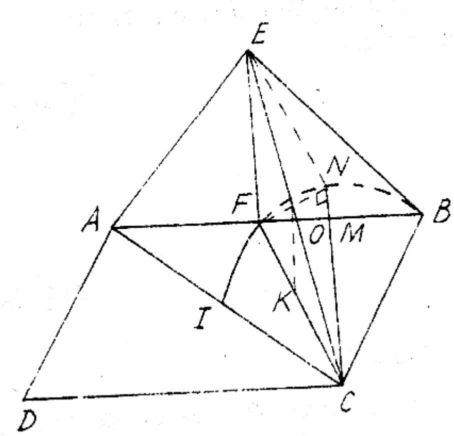
Trục đẳng phương của hai đường tròn này có phương trình

$F_{m_1}(x, y) = F_{m_2}(x, y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2m_1(x - a) = x^2 + y^2 - 2m_2(x - a)$

$\Rightarrow 0 = 2(m_1 - m_2)(x - a) \Leftrightarrow x = a$.

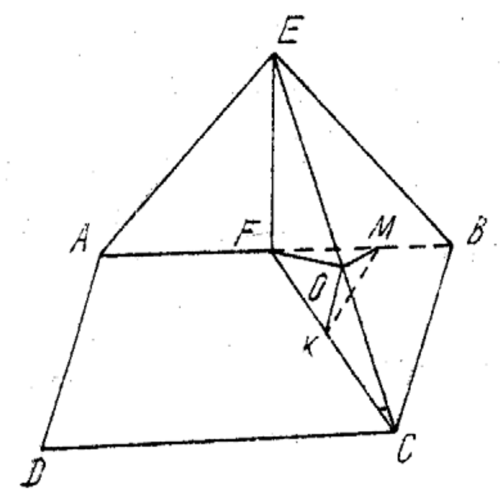
Đường thẳng x = a không phụ thuộc m : nó là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn C_m .



Câu IVb. 1) Ta có $EF \perp P$. Theo định lí ba đường vuông góc : $FN \perp MC$.

FC là đoạn thẳng cố định.

Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ F xuống AC, ta có $EI \perp AC$ (theo định lí ba đường vuông góc).



Khi điểm M vẽ nên đoạn AB, tập hợp điểm N là cung BNFI của đường tròn đường kính FC cố định.

2) MO là trung tuyến trong tam giác ECM:

$$MO^2 = \frac{2(EM^2 + MC^2) - EC^2}{4};$$

$EM^2 = FM^2 + EF^2 = (a - x)^2 + 3a^2 = x^2 - 2ax + 4a^2$; $MC^2 = 4a^2 + x^2$;
$EC^2 = EB^2 + BC^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$.

Từ đó, ta có $MO^2 = x^2 - ax + 2a^2$
$\Rightarrow MO = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$.

3) Gọi K là trung điểm của FC. Ta có : OK//EF,

$$OK = \frac{EF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$OM^2 = OK^2 + MK^2$ (v× $OK \perp (P) \Rightarrow OK \perp KM$). MK nhỏ nhất khi $MK \perp FB$.

Lúc đó MK//BC và $x = \frac{a}{2}$;

$$OM_{min} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Lại có MK đạt giá trị lớn nhất khi M trùng với A tức là $x = 2a$.

$OM_{max} = 2a$.