**Câu 1.**

1) Với $a = \frac{7}{2}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + xy = \frac{7}{2} \\ xy(x + y) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Đặt x + y = S, xy = P, thì được

$S + P = \frac{7}{2}$, $SP = \frac{5}{2}$,

suy ra a) S = 1, P = 5/2 loại vì không thỏa mãn điều kiện $S^2 \ge 4P$ ;

b) $S = \frac{5}{2}$, P = 1 thì được nghiệm

$x = 2,\ y = \frac{1}{2}$ ; $x = \frac{1}{2}$, y = 2.

2) Trong trường hợp tổng quát ta có

$$\begin{cases} S + P = a \\ SP = 3a - 8 \end{cases}$$

Vậy S, P là nghiệm của phương trình

$$t^2 - at + (3a - 8) = 0. \quad (1)$$

Điều kiện của phương trình có nghiệm :

$\Delta = a^2 - 4(3a - 8) = a^2 - 12a + 32 \ge 0 \Rightarrow a \le 4$ hoặc $8 \le a$.

Với điều kiện đó, phương trình (1) có nghiệm

$$t_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 12a + 32}}{2},\ t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 12a + 32}}{2}$$

a) Nếu lấy $S = t_1$, $P = t_2$, thì phải có điều kiện

$S^2 \ge 4P \Rightarrow t_1^2 \ge 4t_2$

hay $$(a - \sqrt{a^2 - 12a + 32})^2 \ge 8(a + \sqrt{a^2 - 12a + 32})$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 16 \ge (a + 4)\sqrt{a^2 - 12a + 32}. \quad (2)$$

b) Nếu lấy $S = t_2$, $P = t_1$, thì tương tự như trên, phải có $t_2^2 \ge 4t_1$ hay

$$a^2 - 10a + 16 \ge -(a + 4)\sqrt{a^2 - 12a + 32}. \quad (3)$$

Thành thử ngoài điều kiện $a \le 4$, $8 \le a$, để hệ có nghiệm, ta còn phải có (2) hoặc (3), tức là

$$a^2 - 10a + 16 \ge -|a + 4|\sqrt{a^2 - 12a + 32}. \quad (4)$$

Vì $a^2 - 10a + 16 = (a - 2)(a - 8)$, nên nếu $a \le 2$, hoặc $8 \le a$ thì (4) được nghiệm. Xét $2 < a \le 4$, khi đó $a^2 - 10a + 16 < 0$, viết (4) dưới dạng

$|a + 4|\sqrt{(a - 4)(a - 8)} \ge -(a - 2)(a - 8)$,

cả hai vế đều không âm, có thể bình phương và được

$(a + 4)^2 (a - 4)(a - 8) \ge (a - 2)^2 (a - 8)^2$ hay do $a - 8 < 0$ :

$(a + 4)^2 (a - 4) \le (a - 2)^2 (a - 8) \Rightarrow 4a^2 - 13a - 8 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{13-3\sqrt{33}}{8} \le a \le \dfrac{13+3\sqrt{33}}{8}$

Kết hợp các điều kiện đã được, ta thấy rằng hệ có nghiệm khi

$a \le \dfrac{13+3\sqrt{33}}{8}$ hoặc $8 \le a$.

**Câu II.**

1) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$|\sin x| = 2\cos x - 1$.

Phải có $2\cos x - 1 \ge 0 \Rightarrow \cos x \ge \dfrac{1}{2}$. Bình phương hai vế phương trình trên thì được

$1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 \Leftrightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0$.

Nghiệm $\cos x = 0$ bị loại, nghiệm $\cos x = \dfrac{4}{5}$ thích hợp, suy ra

$x = \pm\alpha + 2k\pi$ ( $k \in \mathbf{Z}$), với $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

2) Biến đổi hệ thức đã cho dưới dạng

$a(\mathrm{tg}B - \mathrm{tg}\dfrac{(A+B)}{2}) = b(\mathrm{tg}\dfrac{(A+B)}{2} - \mathrm{tg}A)$

$\Rightarrow \dfrac{\sin A \sin[(B-A)/2]}{\cos B} = \dfrac{\sin B.\sin[(B-A)/2]}{\cos A}$

$\Rightarrow \sin[(B - A)/2](\sin 2A - \sin 2B) = 0$.

Suy ra

a) $\dfrac{A-B}{2} = k\pi \Rightarrow A - B = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Vì $-\pi < B - A < \pi$, nên chỉ có $k = 0$ thích hợp $\Rightarrow A = B$ (ABC là tam giác cân) ;

b) $0 = \sin 2A - \sin 2B = 2\sin(A - B)\cos(A + B) = -2\sin(A - B)\cos C$, tức là

hoặc $A - B = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) $\Rightarrow$ (cũng như trên) $A = B$,

hoặc $\cos C = 0 \Rightarrow C = \pi/2 + k\pi$ (chỉ có $k = 0$ thích hợp)

$\Rightarrow C = \pi/2$ (tam giác ABC vuông tại C).

**Câu III.** Hàm số được xác định với mọi x vì $x^2 - x + 1 > 0, \forall x$.

Vì $y' = \dfrac{-3x+3}{2(x^2-x+1)^{3/2}}$

nên hàm số có bảng biến thiên như sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

Thành thử hàm số đạt cực đại khi $x = 1$ ( $y_{max} = 2$).

**Câu IVa**. Để tính

$$I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$$

đặt $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ v = x, \end{cases}$

vậy $I = x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + J = -1 - e^\pi + J$

với $J = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx.$

Lại đặt

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \\ v = x, \end{cases}$$

thì $J = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - I = -I.$

Từ đó suy ra $I = -\dfrac{1}{2}(1 + e^\pi).$

**Câu Va**. Bất kì mặt phẳng P nào đi qua (Δ) phải có phương trình

$p(x + 2y - 3z + 1) + q(2x - 3y + z + 1) = 0$
hay $(p + 2q)x + (2p - 3q)y + (-3p + q)z + (p + q) = 0$,
vậy nó có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (p + 2q\ ;\ 2p - 3q\ ;\ -3p + q).$

Đường thẳng (D) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\ ;\ 2\ ;\ -3)$.

1) Để P // (D), điều kiện cần và đủ là $\vec{n} \perp \vec{u}$ hay

$0 = \vec{n}.\vec{u} = a(p + 2q) + 2(2p - 3q) + 3(3p - q) = p(a + 13) + q(2a - 9),$

muốn vậy tốt nhất là nên chọn p = 9 - 2a, q = a + 13.

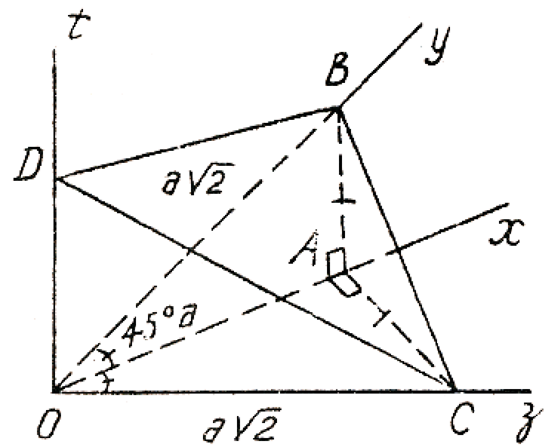
2) Để P ⊥ (D), điều kiện cần và đủ là $\vec{n} \,//\, \vec{u}$, hay

$$\frac{p + 2q}{a} = \frac{2p - 3q}{2} = \frac{-3p + q}{-3},$$

suy ra chẳng hạn q = 0, p = 1, và phải có a = 1.

**Câu IVb**. 1) Xét các tam giác AOB và AOC, ta có :
$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 45^o = a^2$;

$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC\cos 45^0 = a^2$.




Vậy chúng là các tam giác cân ; hơn nữa lại có góc ở đáy bằng $45^0$ nên là vuông cân.

$$\left.\begin{array}{l} OA \perp AC \\ OA \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \quad OA \perp (ABC).$$

2) Xét tam giác cân BOC có $\widehat{BOC} = 60^0$. Vậy ΔBOC đều nên BC = $a\sqrt{2}$. Xét ΔBAC có $2a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2$. Vậy ΔBAC vuông ở A. Từ đó AB ⊥ AC ; mặt khác AB ⊥ OA. Vậy AB ⊥ (OAC) ⇒ AB // Ot, tức là Ox, Oy, Ot cùng trong một mặt phẳng.

3) Hình chóp C.OABD có đáy OABD là hình vuông và CA là đường cao. Vậy $V_{C.OABD} = (1/3)AC.OA^2 = (1/3)a^3$.