Câu I. 1) m = -1 : Hàm số có dạng

$$y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}.$$

a) Bạn đọc tự giải.

b) Hai nhánh nằm về hai phía tiệm cận đứng x = 1 nên có thể coi M_1 thuộc nhánh trái có $x_1 = 1 - \alpha$ và M_2 thuộc nhánh phải có $x_2 = 1 + \beta$ (α và $\beta > 0$).

Thay vào hàm số được

$y_1 = \alpha + \frac{4}{\alpha}$ và $y_2 = -\beta - \frac{4}{\beta}$. Gọi d là khoảng cách giữa M_1 và M_2 thì $d^2 = M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Sau khi rút gọn được

$$d^2 = (\alpha + \beta)^2[1 + (1 + \frac{4}{\alpha\beta})^2].$$

Vì $\alpha, \beta > 0$ nên $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$; dấu bằng xảy ra khi $\alpha = \beta$ (1) ; suy ra

$d^2 \geq 8\alpha\beta\left[\frac{8}{\alpha^2\beta^2} + \frac{4}{\alpha\beta} + 1\right]$ hay $d^2 \geq 8\left[\frac{8}{\alpha\beta} + \alpha\beta + 4\right]$.

Vì $\alpha\beta > 0$ nên theo bất đẳng thức Côsi: $\frac{8}{\alpha\beta} + \alpha\beta \geq 4\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $\alpha\beta = \frac{8}{\alpha\beta}$ (2). Thay vào được

$d \geq 4\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$ (3). d nhỏ nhất khi trong (3) xảy ra dấu bằng. Mặt khác để trong (3) có dấu bằng $\Leftrightarrow$ có (1) và (2)

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \sqrt[4]{8}$.

Vậy $M_1(1 - \sqrt[4]{8}, 4\sqrt{8} + 24\sqrt{2})$ và $M_2(1 + 4\sqrt{8}, -4\sqrt{8} - 24\sqrt{2})$.

2) $y' = \frac{mx^2 + 2m^2x - 3m^3}{(x + m)^2}$. Hàm số có hai điểm cực trị nên

$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Góc (II) và (IV) nằm về hai phía trục Oy nên $x_1 < 0 < x_2$. Gọi $g(x) = mx^2 + 2m^2x - 3m^3$ thì $mg(0) < 0 \Leftrightarrow -3m^4 < 0, \ \forall m \neq 0$ (4). Góc (II) và (IV) nằm về hai phía Ox, mặt khác đối với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất thì $y_{CT} > y_{CD}$ nên điểm cực tiểu thuộc góc (II) và điểm cực đại thuộc góc (IV). Từ đó suy

X		X_1		-m		x_2	
y’	-	0	+	||	+	0	-
Y	↘	CT	↗	||	↗	CĐ	↘

Chứng tỏ g(x) đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_1 và từ dương sang âm khi qua x_2 $\Rightarrow$ hệ số bậc hai của g(x) là m < 0 (6). Từ (4), (5) và (6) suy ra m < $\frac{-\sqrt{5}}{5}$.

Câu II. 1) Khi y = 2 hệ có dạng $\begin{cases} |x^2 - x| \le 1 \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \le 1 \\ x^2 - x \ge -1 \\ x+1 \le 1 \\ x+1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le 0.$

2) $\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \le 0 \ \ (7) \\ |y-2| + |x+1| - 1 \le 0 \ (8) \end{cases}$

Từ (7) $\Leftrightarrow$ y $\geq$ 1 + $|x^2 - x|$ $\Rightarrow$ y $\geq$ 1 (9). Từ (8) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ |y - 2| $\leq$ 1 - |x + 1| $\leq$ 1 $\Rightarrow$ |y - 2| $\leq$ 1. (10)

Ghép (9) và (10) ta đ ợc hệ:

$\begin{cases} y \ge 1 \\ |y-2| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 1 \\ y - 2 \le 1 \\ y-2 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le y \le 3.$

Trong khoảng này có các số nguyên y_1 = 1 ; y_2 = 2 ; y_3 = 3. Với y_1 = 1 thay vào hệ ban đầu được

$\begin{cases} |x^2 - x| \le 0 \\ |x+1| \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

ở phần 1) giải đ ợc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le 0$.

Trong khoảng này có duy nhất 1 số nguyên x = 0;

vậy $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ là một cặp nghiệm nguyên.

Với $y_3 = 3$ thay vào hệ ban đầu đ ợc

$\begin{cases} |x^2 - x| \le 2 \\ |x+1| \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$;

vậy $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ là một cặp nghiệm nguyên.

*Đ*áp số : Có 2 nghiệm nguyên :

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Câu III. 1) Với $m = \frac{1}{2}$ ph ơng trình có dạng

$\sin x + 3\cos x = \frac{1}{\cos x}$. Với điều kiện $\cos x \neq 0$ chia hai vế cho cosx và đặt tgx = t (với $\forall$t) ta đ ợc:

$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1$ và $t_2 = 2$

Với $t_1 = -1 \Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Với $t_2 = 2 = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

2) $m\sin x + (m+1)\cos x = \frac{m}{\cos x}$ (11). Với điều kiện cosx ạ 0, chia hai vế của (11) cho cosx và đặt tgx = t, ta được:
$mt^2 - mt - 1 = 0$ (12).

Khi $\cos x \neq 0$ thì tgx luôn có nghĩa nên phương trình (12) không có điều kiện của ẩn t

$(-\infty < t < +\infty)$.

Với m = 0 : (12) vô nghiệm.

Với $m \neq 0$: (12) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$ hoặc $m \leq -4$.

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$ ta đ ợc đáp số $m > 0$ hoặc $m \leq -4$.

3) Với điều kiện $\cos x \neq 0$, (11) $\Leftrightarrow$ $m\,tg^2x - m\,tgx - 1 = 0$ (13).

$$\cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{1 - tg^2(x_1 + x_2)}{1 + tg^2(x_1 + x_2)}. \quad (14)$$

Với giả thiết $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì (14) có nghĩa.

Mặt khác, $tg(x_1 + x_2) = \frac{tgx_1 + tgx_2}{1 - tgx_1 tgx_2}$ (15). Với giả thiết $\cos x \neq 0$ thì tgx_1 và tgx_2 có nghĩa ; mặt khác, với giả thiết $x_1 + x_2 \neq \pi/2 + k\pi$ thì $1 - tgx_1 tgx_2 \neq 0$ nên (15) có nghĩa. Áp dụng định lý Viet đối với phương trình (13) khi $m > 0$ hoặc $m \leq -4$ ta đ ợc $tgx_1 + + tgx_2 = 1$ và $tgx_1 tgx_2 = -1/m$. Thay vào công thức (15) ta được

$$tg(x_1 + x_2) = \frac{1}{1 - (\frac{-1}{m})} = \frac{m}{m+1}.$$

Thay vào (14) ta được

$$\cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{1 - (\frac{m}{m+1})^2}{1 + (\frac{m}{m+1})^2} = \frac{2m+1}{2m^2 + 2m + 1}.$$

Phần đã giải là xét trường hợp x_1, x_2 được sinh ra do ta giải hai phương trình

Khi $\cos x \neq 0$ thì tgx luôn có nghĩa nên phương trình (12) không có điều kiện của ẩn t $(-\infty < t < +\infty)$.

Với m = 0 : (12) vô nghiệm.

Với $m \neq 0$: (12) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$ hoặc $m \leq -4$.

3) Với điều kiện $\cos x \neq 0$, (11) $\Leftrightarrow m\,tg^2x - m\,tgx - 1 = 0$ (13).

$$\cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{1 - tg^2(x_1 + x_2)}{1 + tg^2(x_1 + x_2)}. \ (14)$$

Với giả thiết $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì (14) có nghĩa.

Mặt khác, $tg(x_1 + x_2) = \frac{tgx_1 + tgx_2}{1 - tgx_1 tgx_2}$ (15). Với giả thiết $\cos x \neq 0$ thì tgx_1 và tgx_2 có nghĩa ; mặt khác, với giả thiết

$x_1 + x_2 \neq \pi/2 + k\pi$ thì $1 - tgx_1 tgx_2 \neq 0$ nên (15) có nghĩa. Áp dụng định lý Viet đối với phương trình (13) khi $m > 0$ hoặc $m \leq -4$ ta đ ọc $tgx_1 + + tgx_2 = 1$ và $tgx_1 tgx_2 = -1/m$. Thay vào công thức (15) ta được

$$tg(x_1 + x_2) = \frac{1}{1 - (\frac{-1}{m})} = \frac{m}{m+1}.$$

Thay vào (14) ta được

$$\cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{1 - (\frac{m}{m+1})^2}{1 + (\frac{m}{m+1})^2} = \frac{2m+1}{2m^2 + 2m + 1}.$$

Phần đã giải là xét trường hợp x_1, x_2 được sinh ra do ta giải hai phương trình

Câu IVa.

1) Tính $I_o = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$

Đặt $u = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1 - u^2 \Rightarrow dx = -2udu$
Khi x = 0 thì u = 1 và khi x = 1 thì u = 0 :

$$I_o = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \int_1^0 -2u^2du = 2\int_0^1 u^2du = \frac{2}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ta có $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

Đặt $u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$,

$dv = \sqrt{1-x}dx \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ $(0 \le x \le 1)$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$

Đây là công thức truy hồi cho I_n.
2) Khai triển I_n ta có :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}.\frac{2(n-1)}{2n+1}.\frac{2(n-2)}{2n-1}.\frac{2(n-3)}{2n-3}\ldots\frac{8}{11}.\frac{6}{9}.\frac{4}{7}.\frac{2}{5}.\frac{2}{3}$$

Với mọi n ∈ **N** ta có bất đẳng thức sau :

$$\sqrt{2n(2n+2)} \le 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n(2n+2)}} \ge \frac{1}{2n+1}$$

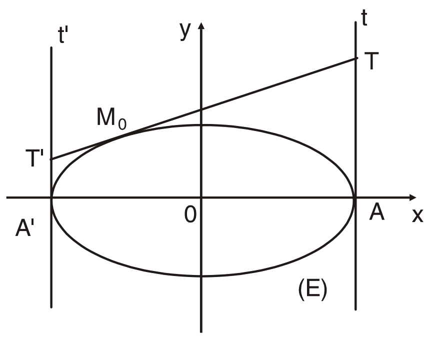
Vì vậy ta suy ra :

$$I_n \le \frac{2n}{\sqrt{(2n+4)(2n+2)}}.\frac{2(n-1)}{\sqrt{2n(2n+2)}}\times$$
$$\times\frac{2(n-2)}{\sqrt{2n(2n-2)}}.\frac{2(n-3)}{\sqrt{(2n-2)(2n-4)}}\times$$
$$\times\ldots\frac{8}{\sqrt{12.10}}.\frac{6}{\sqrt{10.8}}.\frac{4}{\sqrt{8.6}}.\frac{2}{\sqrt{6.4}}.\frac{2}{\sqrt{4.2}} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}.$$

Câu Va.

1) Gọi $M_o(x_o, y_o)$ là điểm thuộc elip. Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại M_o là :

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1.(1)$$



Vì $T \in (\Delta)$ và có hoành độ x = a nên tung độ suy ra từ (1) : $y = \dfrac{b^2}{y_o}\left(1 - \dfrac{x_o}{a}\right)$, tức là : $\overline{AT} = \dfrac{b^2}{y_o}\left(1 - \dfrac{x_o}{a}\right)$

Tương tự T' có hoành độ x = –a nên có tung độ là :

$$y = \overline{A'T'} = \frac{b^2}{y_o}\left(1 + \frac{x_o}{a}\right)$$

Từ đó :

$$\overline{AT}.\overline{A'T'} = \frac{b^4}{y_o^2}\left(1 - \frac{x_o^2}{a^2}\right) \quad (2)$$

Nhưng vì $M_o \in (E)$ nên

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x_o^2}{a^2} = \frac{y_o^2}{b^2}$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $\overline{AT}.\overline{A'T'} = b^2$ = hằng số.

2) Với A'(–a, 0) và T(a, y_T) ta có phương trình đường thẳng A'T là :

$$\frac{y - y_{A'}}{x - x_{A'}} = \frac{y_{A'} - y_T}{x_{A'} - x_T} \Leftrightarrow \frac{y}{x + a} = \frac{y_T}{2a} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ y_T (x + a) = 2ay $\Leftrightarrow$ $b^2(a - x_o)(a + x) = 2a^2 y_o y$ (3)

Tương tự đường AT' có phương trình là :

$$b^2(a + x_o)(x - a) = -2a^2 y_o y \qquad (4)$$

Tọa độ (x_N, y_N) của N là nghiệm của hệ (3) và (4).

Suy ra : $x_N = x_o,\ y_N = \dfrac{y_o}{2}$.

Khi $M_o(x_o, y_o)$ chạy trên (E) ta có :

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{y_o}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_N^2}{a^2} + \frac{y_N^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1 \quad (5)$$

Phương trình (5) chứng tỏ tập hợp các điểm N là elip đồng tâm với (E) có trục lớn là 2a và trục nhỏ là b.

Câu IVb.

1) Theo giả thiết SA = SB = SC, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$ suy ra ΔSAB = ΔSBC = ΔSAC ⇒ AB = AC = BC ⇒ tam giác ABC đều.

Gọi O_1 là hình chiếu của S lên mặt phẳng ABC ⇒ $O_1A = O_1B = O_1C$. Do đó O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì SO_1 vuông góc với mặt phẳng ABC nên SO_1 đi qua tâm O của mặt cầu.

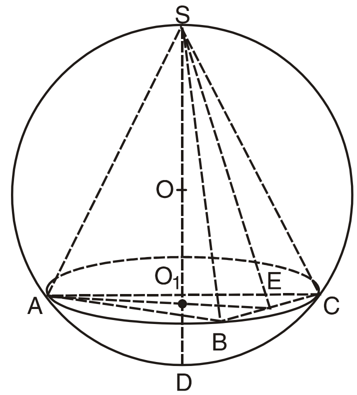
SO_1 cắt mặt cầu tại D. Nối AD. Tam giác SAD vuông tại A vì SD là đường kính. Đặt *l* = SA.

Hai tam giác vuông AO_1S và DAS đồng dạng với nhau (vì có chung $\widehat{ASO_1}$). Suy ra

$$\frac{SO_1}{SA} = \frac{SA}{SD} \Rightarrow SO_1 = \frac{l^2}{2R} (1)$$

Gọi E là trung điểm của BC, ta có :

$BC = 2BE = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$;



$OA_1 = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$,

$$SO_1 = \sqrt{SA^2 - O_1A^2} = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$\frac{l^2}{2R} = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow l = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

Thể tích tứ diện SABC là :

$$V = \frac{1}{3}SO_1.S(\Delta ABC) = \frac{1}{3}SO_1.\frac{BC^2\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2})^2$$

2) Để thể tích tứ diện đạt giá trị lớn nhất theo α thì $\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2})^2$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $x = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ và $y = \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Ta có : $0 < x < 1$,

$$y = x\left(1 - \frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{1}{9}(16x^3 - 24x^2 + 9x),$$

$$y' = \frac{1}{3}(16x^2 - 16x + 3),$$

$y' = 0$ tại $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Thể tích đạt giá trị lớn nhất khi y đạt cực đại, nghĩa là khi $x = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\alpha = 60^o \Rightarrow$ SABC là tứ diện đều.

Thể tích lớn nhất là :

$$V_{max} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3.\frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{3}.\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3.$$

Câu Vb. Trong mặt phẳng tọa độ xét các điểm :

$$A\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right),\ B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right),\ C\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}, 0\right)$$

ta có :

$$AB = \sqrt{\left((x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2},$$

$$AC = \sqrt{\left((x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} = \sqrt{x^2 + xz + z^2},$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)\right]^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Ta luôn có : $AB + AC \geq BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$