

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (8 điểm)**Câu I:** (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1)1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$.**Câu II:** (3 điểm)1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 + 2xy \\ x + x^2y + xy = xy^2 + y + 1 \end{cases}$$
2. Giải bất phương trình:
$$\frac{4^x + (x-1) \cdot 2^x - 8(x-3)}{\log_2 x - 2} \geq 0$$
3. Giải phương trình:
$$3\left(\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}\right) = 2 \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$$
Câu III: (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a thể tích khối chóp $S.AMN$, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .**Câu IV:** (1 điểm) Tính giới hạn:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} \cos^2 x - 1}{x^2}$$
Câu V: (1 điểm) Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$$

PHẦN RIÊNG (2 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần: Phần 1 hoặc Phần 2**PHẦN 1: (Theo chương trình Chuẩn)****Câu VI.a:** (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(1; 6)$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$. Gọi $V(A, k)$ là phép vị tự tâm A tỉ số k sao cho $V(A, k)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') đi qua B . Tính diện tích ảnh của tam giác OAB qua $V(A, k)$.**Câu VII.a:** (1 điểm) Cho khai triển $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^{n-2} C_n^{n-1} + C_n^1 C_n^{n-1} = 11025$.**PHẦN 2: (Theo chương trình Nâng cao)****Câu VI.b:** (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 6 = 0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục Ox . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.**Câu VII.b:** (1 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất.

-----***Hết***-----

Chú ý: Thí sinh dự thi khối B và D không phải làm câu V.

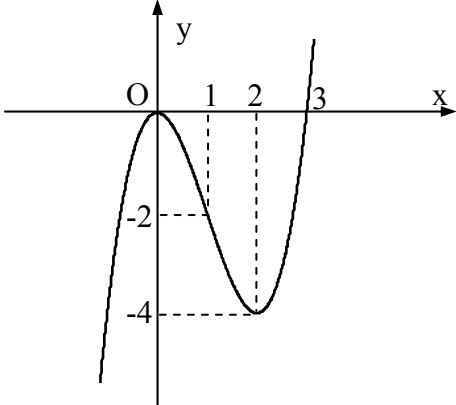
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

- **Điểm toàn bài không làm tròn.**
- **Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa.**
- **Nếu học sinh làm cả hai phần trong phần riêng thì không tính điểm phần tự chọn.**
- **Thí sinh dự thi khối B, D không phải làm câu V; thang điểm dành cho câu I.1 và câu III là 1,5 điểm.**

| Câu | Nội dung | Điểm | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|---|-------------|-----------|-----------|----|-----------|-----------|--|---|---|---|---|---|---|-----------|--|---|--|----|--|-----------|------|
| I.1 | Khảo sát hàm số ... | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>* Với $m = 0$ thì $y = x^3 - 3x^2$</p> <p>1. Tập xác định: \mathbb{R}</p> <p>2. Sự biến thiên:</p> <p>a) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$</p> <p>b) Bảng biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td></td> <td>0</td> <td></td> <td>-4</td> <td></td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> | x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | y' | | + | 0 | - | 0 | + | y | $-\infty$ | | 0 | | -4 | | $+\infty$ | 0,25 |
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | | | | | | | | | | | | | | | | |
| y | $-\infty$ | | 0 | | -4 | | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$</p> <p>- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 0$, đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -4$.</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>3. Đồ thị: Đồ thị giao với trục tung tại $(0; 0)$, giao với trục hoành tại $(0; 0), (3; 0)$. Nhận điểm uốn $I(1; -2)$ làm tâm đối xứng</p>  | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I.2 | Tìm giá trị của tham số m ... | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Ta có $y = x^3 - 3x^2 + mx$, $y' = 3x^2 - 6x + m$</p> <p>Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu là $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt</p> <p>$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Ta có: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$</p> <p>Tại các điểm cực trị thì $y' = 0$, do đó tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn phương trình $y = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$. Như vậy đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$, nên nó có hệ số góc $k_1 = \frac{2}{3}m - 2$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Ta có d: $x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ suy ra d có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{2}$</p> <p>Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có $d \perp \Delta$,</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | <p>suy ra $k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} m - 2 \right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$</p> <p>+) Với $m = 0$ thì đồ thị có hai điểm cực trị là $(0; 0)$ và $(2; -4)$, nên trung điểm của chúng là $I(1; -2)$, ta thấy $I \in d$, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d. Vậy: $m = 0$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--|-------------|---|---|-----------|---|-----------|---------------|---|---|---|---|---|-----------|---|---|---|---|---|----------------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|--|---|------|
| II.1 | <i>Giải hệ phương trình đại số...</i> | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2 y^2 = 1 + 2xy \\ x + x^2 y + xy = xy^2 + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + x^2 y^2 = 1 \\ (x-y)(1+xy) + xy = 1 \end{cases}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Đặt $u = x - y, v = xy$, ta có hệ $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u(1+v) + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 1 \\ u+v+uv = 1 \end{cases}$</p> <p>Đặt $S = u + v, P = uv$ (điều kiện $S^2 \geq 4P$) ta có hệ phương trình</p> $\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ S + P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(1-S) = 1 \\ P = 1-S \end{cases} \Rightarrow S^2 + 2S - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = -3 \end{cases}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>+) Với $S = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$</p> <p>- Nếu $\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{cases}$</p> <p>- Nếu $\begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>+) Với $S = -3 \Rightarrow P = 4 \Rightarrow S^2 < 4P$ (loại) Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x; y) = (-1; -1), (1; 1), (1; 0), (0; -1)$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| II.2 | <i>Giải bất phương trình logarit...</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\frac{4^x + (x-11) \cdot 2^x - 8(x-3)}{\log_2 x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x + x - 3)(2^x - 8)}{\log_2 x - 2} \geq 0 \quad (1)$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>+) Xét $f(x) = 2^x + x - 3, f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R}. $f(1) = 0$.</p> <p>+) Xét $g(x) = 2^x - 8, g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}, g(3) = 0$.</p> <p>+) Xét $h(x) = \log_2 x - 2, h(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty), h(4) = 0$.</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Bảng xét dấu về trái của (1)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$2^x + x - 2$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$2^x - 8$</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$\log_2 x - 2$</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>VT</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td> </td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table> | x | 0 | 1 | 3 | 4 | $+\infty$ | $2^x + x - 2$ | - | 0 | + | + | + | $2^x - 8$ | - | - | 0 | + | + | $\log_2 x - 2$ | - | - | - | 0 | + | VT | - | 0 | + | 0 | - | | + | 0,25 |
| x | 0 | 1 | 3 | 4 | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $2^x + x - 2$ | - | 0 | + | + | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $2^x - 8$ | - | - | 0 | + | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\log_2 x - 2$ | - | - | - | 0 | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| VT | - | 0 | + | 0 | - | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Theo bảng xét dấu, bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [1; 3] \cup (4; +\infty)$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| II.3 | <i>Giải phương trình lượng giác...</i> | 1,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $3\left(\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}\right) = 2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow 3\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) = (2 + \sin x)\cos x$ $\Leftrightarrow 3\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\sin x\right) = (2 + \sin x) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\Leftrightarrow \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) (2 + \sin x) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>* $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$</p> <p>* $2 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2$ (vô nghiệm)</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |
|------------|--|-------------|
| | $* \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ (vô nghiệm)}$ <p>Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$</p> | 0,25 |
| III | Tính thể tích khối chóp... | 1,00 |
| | | |
| | <p>Ta có các tam giác SMN và AMN cân tại S và A. Gọi I là trung điểm của MN suy ra $SI \perp MN$ và $AI \perp MN$. Do $(SBC) \perp (AMN)$ nên $SI \perp (AMN)$.</p> <p>Do đó $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{AMN} = \frac{1}{6} SI \cdot AI \cdot MN$</p> | 0,25 |
| | <p>Gọi K là trung điểm của BC suy ra I là trung điểm của SK, mà $AI \perp SK$ nên tam giác ASK cân tại A. Do đó $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$</p> | 0,25 |
| | $MN = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}, NI = \frac{1}{2} MN = \frac{a}{4}, SN = \frac{SC}{2} = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ $SI = \sqrt{SN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ | 0,25 |
| | $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \text{Vậy } V_{S.AMN} = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{2}}{4} \frac{a\sqrt{10}}{4} \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{5}}{96}$ | 0,25 |
| | <p>Chú ý: Thí sinh có thể sử dụng công thức: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$</p> | |
| IV | Tính giới hạn..... | 1,00 |
| | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} \cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{x^2} - 1) \cos^2 x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ | 0,50 |
| | $= \ln 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 \ln 2} - 1}{x^2 \ln 2} - \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \ln 2 - 1$ | 0,50 |
| V | Chứng minh bất đẳng thức... | 1,00 |
| | <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:</p> $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (*),$ <p>Áp dụng (*) ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c}; \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a+b+2c}$</p> $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{2a+b+c}$ $\Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2}{2a+b+c} + \frac{2}{a+2b+c} + \frac{2}{a+b+2c} \quad (1)$ | 0,25 |

| | | |
|--------------|---|-------------|
| | Mặt khác ta lại có $(2a^2 + 2) + (b^2 + 1) + (c^2 + 1) \geq 2\sqrt{2a^2 \cdot 2} + 2\sqrt{b^2 \cdot 1} + 2\sqrt{c^2 \cdot 1} = 2(2a + b + c)$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq 2(2a + b + c) \Rightarrow a^2 + 7 \geq 2(2a + b + c) \Rightarrow \frac{1}{2a + b + c} \geq \frac{2}{a^2 + 7}$ | |
| | Tương tự: $\frac{1}{2a + c + a} \geq \frac{2}{b^2 + 7}$; $\frac{1}{2c + a + b} \geq \frac{2}{c^2 + 7}$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} \geq \frac{2}{a^2 + 7} + \frac{2}{b^2 + 7} + \frac{2}{c^2 + 7}$ (2) | |
| | Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geq \frac{4}{a^2 + 7} + \frac{4}{b^2 + 7} + \frac{4}{c^2 + 7}$ | 0,25 |
| | Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ | |
| VII.a | Tính diện tích ảnh của tam giác qua phép vị tự ... | 1,00 |
| | Do $B \in \overrightarrow{(C)}$ nên tồn tại $M(x; y) \in (C)$ sao cho B là ảnh của M qua $V(A; k)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$. Do $A \neq B$, nên $k \neq 0$ | |
| | $\Rightarrow \begin{cases} 1 - 1 = k(x - 1) \\ 6 - 2 = k(y - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4 + 2k}{k} \end{cases}$ | 0,25 |
| | Do M thuộc (C) nên $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Rightarrow (1 - 2)^2 + \left(\frac{4 + 2k}{k} - 1\right)^2 = 2$ | |
| | $\Leftrightarrow (4 + k)^2 = k^2 \Leftrightarrow k = -2$. | 0,25 |
| | +) Đường thẳng AB có phương trình $x - 1 = 0$, do đó $d(O, AB) = 1$ | |
| | Độ dài $AB = 4$. Suy ra $S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O, AB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$. | 0,25 |
| | Ảnh của tam giác OAB qua phép vị tự $V(A, 2)$ có diện tích $S = -2 \cdot S_{OAB} = 2$. | 0,25 |
| VII.a | Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ | 1,00 |
| | Ta có $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^{n-2} C_n^{n-1} + C_n^1 C_n^{n-1} = 11025 \Leftrightarrow (C_n^2 + C_n^1)^2 = 105^2$ | |
| | $C_n^2 + C_n^1 = 105 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n = 105 \Leftrightarrow n^2 + n - 210 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 14 \\ n = -15 \text{ (loại)} \end{cases}$ | 0,25 |
| | Ta có khai triển $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{14-k} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k 2^{k-14} \cdot 3^{-k} \cdot x^k$ | |
| | Do đó $a_k = C_{14}^k 2^{k-14} \cdot 3^{-k}$ | 0,25 |
| | Ta xét tỉ số $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{14}^{k+1} 2^{k-13} 3^{-k-1}}{C_{14}^k 2^{k-14} 3^{-k}} = \frac{2(14-k)}{3(k+1)}$. | |
| | $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(14-k)}{3(k+1)} > 1 \Leftrightarrow k < 5$. Do $k \in \mathbb{N}$, nên $k \leq 4$. | 0,25 |
| | Tương tự $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Leftrightarrow k > 5, \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 \Leftrightarrow k = 5$ | |
| | Do đó $a_0 < a_1 < \dots < a_4 < a_5 = a_6 > a_7 > \dots > a_{14}$ | |
| | Do đó a_5 và a_6 là hai hệ số lớn nhất | 0,25 |
| | Vậy hệ số lớn nhất là $a_5 = a_6 = C_{14}^5 2^{-9} 3^{-5} = \frac{1001}{62208}$ | |

| | | |
|-------------|--|-------------|
| VIb | <i>Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật...</i> | 1,00 |
| | <p>Ta có: $d_1 \cap d_2 = I$. Tọa độ của I là nghiệm của hệ:</p> $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9/2 \\ y = 3/2 \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ <p>Do vai trò A, B, C, D nên giả sử M là trung điểm cạnh AD $\Rightarrow M = d_1 \cap O_x$ Suy ra M(3; 0)</p> | 0,25 |
| | <p>Ta có: $AB = 2IM = 2\sqrt{\left(3 - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$</p> <p>Theo giả thiết: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \Leftrightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$</p> <p>Vì I và M cùng thuộc đường thẳng $d_1 \Rightarrow d_1 \perp AD$</p> <p>Đường thẳng AD đi qua M (3; 0) và vuông góc với d_1 nhận $\vec{n}(1;1)$ làm VTPT nên có PT: $1(x - 3) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$. Lại có: $MA = MD = \sqrt{2}$</p> | 0,25 |
| | <p>Tọa độ A, D là nghiệm của hệ PT: $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{2} \end{cases}$</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ (x - 3)^2 + (3 - x)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x - 3 = \pm 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } A(2; 1), D(4; -1)$ | 0,25 |
| | <p>Do $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC suy ra: $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 9 - 2 = 7 \\ y_C = 2y_I - y_A = 3 - 1 = 2 \end{cases}$</p> <p>Tương tự I cũng là trung điểm của BD nên ta có B(5; 4) Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: (2; 1), (5; 4), (7; 2), (4; -1)</p> | 0,25 |
| VIIb | <i>Tìm tọa độ điểm M thuộc (C)</i> | 1,00 |
| | <p>+) Ta có $y = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$. Do đó (C) có tiệm cận xiên $y = 2x - 1$.</p> <p>+) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -\infty$. Do đó (C) có tiệm cận đứng $x = 1$</p> <p>+) Gọi $M \in (C) \Rightarrow M = \left(x_0; 2x_0 - 1 + \frac{1}{x_0 - 1}\right)$, $x_0 \neq 1$</p> | 0,25 |
| | <p>Tổng khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) là</p> $d = x_0 - 1 + \frac{\left 2x_0 - \left(2x_0 - 1 + \frac{1}{x_0 - 1}\right) - 1\right }{\sqrt{2^2 + 1^2}} = x_0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{5} x_0 - 1 }$ | 0,25 |
| | <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có</p> $d \geq 2\sqrt{ x_0 - 1 \frac{1}{\sqrt{5} x_0 - 1 }} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ khi } x_0 - 1 = \frac{1}{\sqrt{5} x_0 - 1 } \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ | 0,25 |
| | <p>Vậy d nhỏ nhất khi $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}; 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right)$; $M = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}; 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right)$</p> | 0,25 |