

Câu I.

1) Cho hàm số

$$f(x) = 3 \cos^4 x - 5 \cos 3x - 36 \sin^2 x - 15 \cos x + 36 + 24a - 12a^2.$$

Với giá trị nào của  $a$  thì  $f(x) > 0$  với mọi  $x$  ?

2) Xác định tham số  $a$  để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a \\ x+y = 3a \end{cases}$$

Câu II.

1) Tam giác  $ABC$  có các cạnh với độ dài  $a, b, c$ , và có diện tích  $S$ . Đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với các cạnh ở  $A', B', C'$  (đối diện với các đỉnh  $A, B, C$ ). Tam giác  $A'B'C'$  có các cạnh  $a', b', c'$ , và diện tích  $S'$ . Chứng minh các đẳng thức sau :

$$i) \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$$

$$ii) \frac{S'}{S} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

2) Chứng minh rằng với mọi  $x$ , ta đều có

$$\left| \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Câu III. Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

**Câu IVa.**

Cho  $f$  là một hàm liên tục trên  $[0 ; 1]$ . Chứng minh rằng

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx.$$

**Câu Va.**

Cho parabol (P) :  $y^2 = 2px$

và đường thẳng

$$(\Delta) : 2mx - 2y - mp = 0.$$

Gọi  $M'$ ,  $M''$  là các giao điểm của (P) và (D). Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính  $M'M''$  tiếp xúc với đường chuẩn của parabol (P).

**Câu IVb.**

Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A_1B_1C_1$  (đáy là tam giác đều), cạnh đáy bằng  $a$ , đường cao bằng  $h$ .  $M$  là một điểm nằm trên đường chéo  $AB_1$  của mặt  $ABB_1A_1$  sao cho  $AM : MB_1 = 5 : 4$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với các đường thẳng  $A_1C$  và  $BC_1$ .

1) Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BC_1$ .

2) Xác định thiết diện do mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt lăng trụ.

3) Cạnh  $CC_1$  bị mặt phẳng  $(\alpha)$  chia theo tỉ số nào ?