

Câu I.

Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + 1)x + 4m^3 + m}{x + m}.$$

1) Với $m = -1$:

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị một điểm, sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất.

2) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số tương ứng có một điểm cực trị thuộc góc phần tư (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư (IV) của mặt phẳng tọa độ.

Câu II. Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $y = 2$.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x ; y)$ của hệ.

Câu III. Cho phương trình

$$m \sin x + (m + 1) \cos x = \frac{m}{\cos x}.$$

1) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$.

2) Tìm m để phương trình có nghiệm.

3) Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thỏa mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \text{ Hãy tính } \cos 2(x_1 + x_2)$$

Câu Iva.

Cho

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

1) Chứng minh rằng

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n.$$

2) Chứng minh rằng

$$I_n < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Câu Va.

Cho elip (E)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gọi AA' là trục lớn của elip, dựng các tiếp tuyến At và A't'. Một tiếp tuyến qua điểm M thuộc (E) cắt At và A't' tại T và T'.

1) Chứng minh rằng tích AT.A'T' không phụ thuộc M.

2) Tìm tập hợp giao điểm N của AT' và A'T khi M chạy trên (E).

Câu IVb.

Cho hình cầu bán kính R. Từ một điểm S bất kì trên mặt cầu, dựng 3 cát tuyến bằng nhau, cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C, và từng đôi một lập với nhau góc α .

1) Tính thể tích tứ diện SABC theo R và α .

2) Khi α thay đổi, xác định α để thể tích ấy lớn nhất.

Câu Vb.

x, y, z là 3 số tùy ý. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$.