

Câu I.

1) Chứng minh rằng với mọi số a, b ta đều có

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

2) Giải bất phương trình

$$\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \leq 0.$$

Câu II.

R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC ; h, l là độ dài đường cao và phân giác trong xuất phát từ cùng một đỉnh của tam giác ấy.

Chứng minh $\frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Khi nào thì xảy ra dấu đẳng thức ?

Câu III. 1) Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3.$$

2) Trong tất cả các tứ giác $ABCD$ với $AB = BC = CD = a$ ($a > 0$ cho trước), hãy xác định tứ giác có diện tích lớn nhất.

Câu Va.

M là một điểm thuộc parabol $y^2 = 64x$, N là một điểm thuộc đường thẳng

$$4x + 3y + 46 = 0.$$

- 1) Xác định M, N để đoạn MN là ngắn nhất.
- 2) Với kết quả đã tìm được ở 1) chứng tỏ rằng khi đó đường thẳng MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Câu IVb.

Trong hai mặt phẳng vuông góc (P), (Q), cho hai tam giác cân ACD và BCD có chung đáy $CD = 2x$, và các cạnh khác có độ dài bằng a. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD.

- 1) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD.
- 2) Tính theo a và x độ dài các đoạn AB và MN.
- 3) Xác định x để nhị diện (C, AB, D) là vuông. Trong trường hợp đó, tính độ dài đoạn AB, xác định điểm O cách đều 4 điểm A, B, C, D và tính độ dài OA.