KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM (CAUCHY)

- ***Kỹ thuật chọn điểm rơi hay còn được gọi kỹ thuật điều chỉnh và lựa chọn tham số.***

Đối với một số BĐT đồng dạng không đối xứng thì dấu BĐT trong BĐT thường xảy ra khi giá trị của các biến tướng ứng không bằng nhau. Vì vậy, cần lựa chọn kỹ thuật hợp lý để giải các bài toán BĐT (hay cực trị) dạng không đối xứng là rất cần thiết. Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất chính là *xây dựng thuật toán sắp thứ tự gần đều.* *(kỹ thuật điểm rơi).*

Kỹ thuật chủ yếu ở đây thường là các giá trị trung gian được xác định theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ đưa vào một cách hợp lý để phương trình xác định chúng có nghiệm.

❖ Một số bất đẳng thức cơ bản

- ***Bất đẳng thức Cauchy***

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n (n \geq 2)$ ta luôn có $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

- ***Một vài hệ quả quan trọng***:

+ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ với $\forall a_i > 0,\ i = \overline{1,n}$

+ $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \geq \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ với $\forall a_i > 0,\ i = \overline{1,n}$

+ Cho $2n$ số dương ($n \in Z, n \geq 2$): $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_n}$$

Bài toán mở đầu:

VD1. Cho $a, b > 0$. Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Khi đó ta có hệ quả với $a > 0$ thì $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Rõ ràng với bài toán trên là kết quả của BĐT Cauchy.

Nếu thay điều kiện $a > 0$ bởi $a \geq 1$ hay $a \geq 2$ hay $a \geq 9$… thì lời giải bài toán như nào??

Bài 1: Cho $a \geq 3$. Tìm Min của $S = a + \dfrac{1}{a}$

Bình luận và lời giải :

+Sai lầm :

$$S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \min S = 2$$

+Nguyên nhân :

$$\min S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} = 1$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$

+Xác định điểm rơi :

Ta thấy rằng khi a tăng thì S cũng càng lớn nên dẫn đến dự đoán khi a=3 thì S nhận giá trị nhỏ nhất . Và $\min S = \frac{10}{3} \Leftrightarrow a = 3$. Do BĐT Cauchy xãy ra dấu đẳng thức tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau nên ta đưa tham số α sao cho tại điểm rơi a = 3 thì cặp số $\frac{a}{\alpha}$ và $\frac{1}{\alpha}$ phải bằng nhau.

Với a=3 cho cặp số

$$\begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 9$$

+Lời giải đúng :

$$S = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} + \frac{8.3}{9} = \frac{10}{3} \Rightarrow MinS = \frac{10}{3}$$

Đẳng thức xãy ra $\Leftrightarrow a = 3$

Bài 2: Cho $a \geq 2$ .Tìm Min của $S = a + \frac{1}{a^2}$

+Xác định điểm rơi : a=2 cho cặp số

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha} \\ \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 8$$

+Sai lầm :

$$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \frac{2}{\sqrt{8a}} + \frac{7a}{8} \geq \frac{2}{\sqrt{8.2}} + \frac{7.2}{8} = \frac{9}{4}$$

Với a=2 thì $\min S = \dfrac{9}{4}$

+Nguyên nhân : Lời giải trên mắc sai lầm ở việc đánh giá mẫu số : " Nếu $a \geq 2$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{8a}} \geq \dfrac{2}{4}$ là đánh giá sai "

Ta phải làm sao để khi sử dụng BĐT Cauchy sẽ khử hết biến số a ở cả mẫu số và tử số

+Lời giải đúng :

$$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{6a}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{6.2}{8} = \frac{9}{4} \Rightarrow \min S = \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xãy ra $\Leftrightarrow a = 2$

Bài 3: Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$.Tìm min của $S = ab + \dfrac{1}{ab}$

+Sai lầm :

$S = ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \Rightarrow \min S = 2$

+Nguyên nhân :

$\min S = 2 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{ab} = 1 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$

(vô lí)

+Lời giải đúng :

Đặt

$t = \frac{1}{ab} \Rightarrow t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 4$

điều này dẫn đến một bài toán mới

Cho $t \geq 4$. *Tìm min của* $S = t + \frac{1}{t}$

Với

$t = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \\ \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{\alpha} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 16$

Ta có :

$S = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \geq 2\sqrt{\frac{t}{16}.\frac{1}{t}} + \frac{15.4}{16} = \frac{17}{4}$

Với $t = 4$ hay $a = b = \frac{1}{2}$ thì $\min S = \frac{17}{4}$

Lời giải bài 3:

Do

$t = 4 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

nên

$$S = ab + \frac{1}{ab} \ge \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \ge 2\sqrt{ab.\frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \ge \frac{17}{4} \Rightarrow \min S = \frac{17}{4}$$

Đẳng thức xãy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Bài 4: Cho a,b,c>0 thoả mãn $a + b + c \le \frac{3}{2}$.Tìm min

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

+Sai lầm :

$$S \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} \ge 3\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}\right)\left(2\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}\right)\left(2\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}\right)} = 3.\sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \min S = 3\sqrt{2}$$

+Nguyên nhân :

$$\min S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$$

trái với giả thiết .

+Xác định điểm rơi :

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{\alpha a^2}=\frac{1}{\alpha b^2}=\frac{1}{\alpha c^2}=\frac{4}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=16$$

+Lời giải đúng :

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+...+\frac{1}{16b^2}}_{16}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+...+\frac{1}{16c^2}}_{16}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+...+\frac{1}{16a^2}}_{16}}\geq$$

$$\geq\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}=\sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right]\geq$$

$$\geq 3\sqrt{17}.\sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{(2a.2b.2c)^5}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\min S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Bài 5: Cho a,b,c>0 và $a+2b+3c\geq 20$.Tìm min của

$$S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Lời giải : Ta dự đoán được S=1 tại điểm rơi a=2 , b=3 , c=4 .Sử dụng BĐT Cauchy ta có :

$$\begin{cases} a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{a.\frac{4}{a}}=4 \\ b+\frac{9}{b}\ge 2\sqrt{b.\frac{9}{b}}=6 \\ c+\frac{16}{c}\ge 2\sqrt{c.\frac{16}{c}}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)\ge 3 \\ \frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)\ge 3 \\ \frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\ge 8 \quad (1)$$

Mà

$$a+2b+3c\ge 20 \Rightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\ge 5 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế được

$S\ge 13 \Rightarrow \min S=13$

Đẳng thức xãy ra $\Leftrightarrow a=2,b=3,c=4$

* ***<u>Bài tập tương tự</u>:***

Bài 6: Cho

$$\begin{cases} a,b,c>0 \\ ab\ge 12; bc\ge 8 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$S=(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge \frac{121}{2}$$

Bài 7: Cho a,b,c>0 và a=max{a,b,c} . Tìm min của

$$S=\frac{a}{b}+2\sqrt{1+\frac{b}{c}}+3\sqrt[3]{1+\frac{c}{a}}$$

Bài 8: Cho tam giác ABC .Tìm min của

$$T=\sin A+\sin B+\sin C+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

Bài 9: Cho tam giác ABC nhọn .Tìm min của

$$T=\sqrt{\sin^2 A+\frac{1}{\cos^2 B}}+\sqrt{\sin^2 B+\frac{1}{\cos^2 C}}+\sqrt{\sin^2 C+\frac{1}{\cos^2 A}}$$

Bài 10. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$.

Lời giải

Sai lầm 1:

Ta có $P\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{5}{18}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{10}{9}$

$\Rightarrow MaxP=\frac{10}{9}$

Sai lầm 2:

$$P\le\frac{1}{3\sqrt[3]{2xyz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x.2yz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{xy2z}}\le\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{10}{9}$$

Nguyên nhân sai lầm: Cả hai lời giải trên đều đã biết hướng "đích" song chưa biết chọn điểm rơi. $MaxP=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x=y=z \\ 2y=x=z \\ 2z=x=y \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$ (vn), tức là không tồn tại $(x,y,z)\in D:P=\frac{10}{9}$

Lời giải đúng: Từ hai lời giải trên với dự đoán $MaxP$ đạt được tại $x=y=z=\frac{4}{3}$ nên tách các số $2x=x+x$ ra cho dấu bằng xẩy ra.

Cách 1: Ta có $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, tương tự và ta có:

$P\le\frac{1}{16}\left[\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)\right]=1$, vậy $MaxP=1$ khi $x=y=z=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Ta có $2x+y+z=x+x+y+z\ge 4\sqrt[4]{x.x.y.z}\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4\sqrt[4]{x^2yz}}$, mặt khác:

$\sqrt[4]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\frac{1}{z}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, tương tự ta có:

$P\le\frac{1}{16}.4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{4}$, suy ra:

$MaxP=1$ khi $x=y=z=\frac{1}{4}$.

Ta có thể thể mở rộng bài toán 10. Thành ***bài toán tổng quát*** sau.

Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4\end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z}+\frac{1}{\beta x+\gamma y+\alpha z}+\frac{1}{\gamma x+\alpha y+\beta z}$.

Với $\alpha,\beta,\gamma\in N^*$