

ĐỀ 02

I. PHẦN BẮT BUỘC (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, m là tham số thực .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$.

2. Giải phương trình: $\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$.

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x$, $\left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = BC = BD = DA = 1$. Tính

thể tích tứ diện $ABCD$ theo x . Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Câu V: (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

II. PHẦN TỰ CHỌN (3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).

1. Theo chương trình Chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $(d) : x = 2(y-1) = z+1$ cắt mặt cầu

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho độ dài dây cung $MN = 8$.

2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình: $2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$.

Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm A, B .

Câu VII.a (1 điểm) Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \dots + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = (n+2).2^{n-1}.$$

2. Theo chương trình Nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $(d) : x = 2(y-1) = z+1$ tiếp xúc mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0.$$

2. Tìm trên đường thẳng $(d) : 2x - y - 5 = 0$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $2x + y + 5 = 0$ bằng $\sqrt{5}$.

Câu VII.b (1 điểm) Với n là số tự nhiên, giải phương trình:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \dots + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = 128.(n+2).$$

.....Cán Bộ coi thi không giải thích gì thêm.....

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, m là tham số thực .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$. Học sinh tự làm .

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

\Leftrightarrow Phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng

\Leftrightarrow Phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn : $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1) mà

$x_1 + x_3 + x_2 = 3$ (2). Từ (1), (2) suy ra $x_2 = 1$.

• $x_2 = 1$ là nghiệm phương trình (*) nên ta có : $1^3 - 3.1^2 - 9.1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 11$

• $m = 11$ phương trình (*) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 luôn thỏa điều kiện $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Vậy $m = 11$ là tham số thực cần tìm .

Ngoài cách giải trên hs có thể lựa chọn phương pháp cấp số cộng thuộc chương trình giải tích lớp 11

Chú ý : Do chương trình mới giảm tải bài điểm uốn của chương trình ban cơ bản , sự giảm tải này đã dẫn đến các bài toán về cấp số cộng , cấp số nhân khá hạn chế trong mỗi đề thi . Nếu xuất hiện bài toán về cấp số thì việc lựa chọn phương pháp giải liên quan điểm uốn đều không chấp nhận. Do đó học sinh cần lưu ý điều này.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$$

Phương trình : $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x) \Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x)$ (*)

TH1: $0 < x < 1$

Phương trình : (*) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \log_2[(x+3)(-x+1)] = \log_2(4x)$. Hs tự giải

TH2: $x > 1$

Phương trình : (*) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \log_2[(x+3)(x-1)] = \log_2(4x)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (1)} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

2. Giải phương trình: $\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1 + \cos \frac{2x}{3}}{2} = \frac{1 - \cos x}{4} \Leftrightarrow 1 + 2 + 2 \cos \frac{2x}{3} = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \cos 2\left(\frac{x}{3}\right) = -\cos 3\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow 2 + 2\left(2 \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 1\right) = -\left(4 \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4 \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2 + 4 \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(4 \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) + 4 \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (l) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi \\ x = \pm\pi + k6\pi. \end{cases}$$

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x, \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ và $AC = BC = BD = DA = 1$. Tính

thể tích tứ diện $ABCD$ theo x . Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó. Đây là dạng toán trong sách bài tập hình học 12.

Học sinh tự vẽ hình

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD

$$\text{Để thấy } V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{BICD}, \quad V_{AICD} = \frac{1}{3} AI \cdot dt_{ICD}, \quad V_{BICD} = \frac{1}{3} BI \cdot dt_{ICD}$$

$$\text{Hay : } V_{ABCD} = \frac{1}{3} dt_{ICD} (AI + BI), \quad dt_{ICD} = \frac{1}{2} \cdot IJ \cdot CD$$

Để dàng chứng minh được IJ là đoạn vuông góc chung của AB, CD

$$\text{Ta có : } IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = 1 - 2x^2, \quad AI = BI = x$$

$$\Rightarrow dt_{ICD} = \frac{1}{2} \cdot IJ \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \cdot 2x = x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \quad (\text{đvdt}).$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} dt_{ICD} (AI + BI) = \frac{1}{3} x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} (x + x) = \frac{2x^2}{3} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \quad (\text{đvtt}).$$

$$\frac{2x^2}{3} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x^2 (1 - 2x^2)} \leq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + (1 - 2x^2)}{3} \right)^3} = \frac{2}{9\sqrt{3}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } \max V_{ABCD} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \quad (\text{đvdt}) \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 2}} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx..$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{u}{\sqrt{u^2+2}} du = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d(\sqrt{u^2+2}) = \sqrt{u^2+2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

Học sinh yếu hơn có thể đặt $t = \sqrt{u^2+2} \Rightarrow dt = \frac{u}{\sqrt{u^2+2}} du$.

Câu V: (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m, m \in \mathbb{R} .$$

Xét hàm số : $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\text{Ta có : } f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} \right).$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \text{ ta có } x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0.$$

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	1	-4

Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow -4 \leq m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m = 1$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Ban cơ bản và nâng cao có cùng đáp án.

Câu VI.a (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $(d) : x = 2(y-1) = z+1$ cắt mặt cầu

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho độ dài dây cung $MN = 8$.

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0 \Leftrightarrow (S) : (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 - m$ có tâm $I(2; 3; 0)$, bán kính

$$R = IN = \sqrt{13 - m}, m < 13$$

 Dựng $IH \perp MN \Rightarrow MH = HN = 4$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{IN^2 - HN^2} = \sqrt{13 - m - 16} = \sqrt{-m - 3}, m < -3 \text{ và } IH = d_{(I; (d))}$$

(d) luôn đi qua $A(0; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(1; \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{1}{2}(2; 1; 2)$

$$\overline{AI} = (-2; 2; 1); [\overline{AI}; \vec{u}] = (3; 6; -6)$$

$$\Rightarrow d_{(I;d)} = \frac{|\overline{AI}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

$$IH = d_{(I;d)} \Leftrightarrow \sqrt{-m-3} = 3 \Leftrightarrow -m-3 = 9 \Leftrightarrow m = -12$$

Vậy $m = -12$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình: $2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm A, B .

Phương trình đường trung trực của AB là $3x - y - 6 = 0$.

Tọa độ tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3) \Rightarrow R = IA = 5$$

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Câu VII.a (1 điểm) Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \dots + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = (n+2).2^{n-1}.$$

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n$.

Nhân vào hai vế với $x \in \mathbb{R}$, ta có: $(1+x)^n x = C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + C_n^3x^4 + \dots + C_n^{n-1}x^n + C_n^n x^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$\begin{aligned} C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + 4C_n^3x^3 + \dots + nC_n^{n-1}x^{n-1} + (n+1)C_n^n x^n \\ = n(1+x)^{n-1}x + (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(nx+x+1). \end{aligned}$$

Thay $x = 1$, ta được kết quả: $C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \dots + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

Một bài toán giải thế này đúng chưa?

Cho nhị thức $\left(x^3y + \frac{y^2}{x}\right)^{95}$, có bao nhiêu số hạng trong dãy mà số mũ của x chia hết số mũ của y .

Cho nhị thức $\left(x^3y + \frac{y^2}{x}\right)^{95}$, có bao nhiêu số hạng trong dãy mà số mũ của x chia hết số mũ của y

$$\left(x^3y + \frac{y^2}{x}\right)^{95} = \sum_{i=0}^{95} C_{95}^i (x^3y)^{95-i} \left(\frac{y^2}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{95} C_{95}^i x^{3.95-4.i} .y^{95+i}, \quad 0 \leq i \leq 95.$$

Số mũ của của x chia hết số mũ của y , khi đó tồn tại số nguyên t sao cho $(t+4)i = 95(3-t)$ (*)

• $t = -4$ thì (*) vô nghiệm.

• $t \neq -4$ thì (*) $\Rightarrow i = \frac{95(3-t)}{t+4}$, $0 \leq i \leq 95 \Rightarrow t = 0, 1, 2, 3$.

+ $t = 0 \Rightarrow i = \frac{95.3}{4}$ loại.

+ $t = 1 \Rightarrow i = \frac{95.2}{5} = 38$ nhận, số hạng cần tìm là $C_{95}^{38} x^{133} .y^{133}$.

+ $t = 2 \Rightarrow i = \frac{95}{6}$ loại.

+ $t = 3 \Rightarrow i = 0$ nhận, số hạng cần tìm là $C_{95}^0 x^{258} \cdot y^{95}$.

Vậy có hai số hạng thỏa mãn bài toán: $C_{95}^0 x^{258} \cdot y^{95}$ và $C_{95}^{38} x^{133} \cdot y^{133}$.