Bộ Giáo Dục và Đào tạo
ĐỀ THAM KHẢO
Email: phukhanh@moet.edu.vn

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2010
Môn thi : TOÁN - khối A.
Ngày thi : *07.03.2010 (Chủ Nhật)*

ĐỀ 02

I. PHẦN BẮT BUỘC (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, m là tham số thực .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x+3\right) + \frac{1}{4}\log_4\left(x-1\right)^8 = 3\log_8\left(4x\right)$.
2. Giải phương trình: $\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x, \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = BC = BD = DA = 1$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ theo x .Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Câu V: (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

II. PHẦN TỰ CHỌN (3,0 điểm) *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).*

1. Theo chương trình Chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $\left(d\right): x = 2\left(y-1\right) = z+1$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho độ dài dây cung $MN = 8$.
2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình: $2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A\left(1;2\right)$, $B\left(4;1\right)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm A, B.

Câu VII.a (1 điểm) Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \ldots + n.C_n^{n-1} + \left(n+1\right).C_n^n = \left(n+2\right).2^{n-1}.$$

2. Theo chương trình Nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $\left(d\right): x = 2\left(y-1\right) = z+1$ tiếp xúc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$.
2. Tìm trên đường thẳng (d): $2x - y - 5 = 0$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $2x + y + 5 = 0$ bằng $\sqrt{5}$.

Câu VII.b (1 điểm) Với n là số tự nhiên, giải phương trình:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + \ldots + n.C_n^{n-1} + \left(n+1\right).C_n^n = 128.\left(n+2\right).$$

....Cán Bộ coi thi không giải thích gì thêm..

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, m là tham số thực .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$ .Học sinh tự làm .

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn : $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1) mà $x_1 + x_3 + x_2 = 3$ (2). Từ $(1),(2)$ suy ra $x_2 = 1$.

- $x_2 = 1$ là nghiệm phương trình $(*)$ nên ta có : $1^3 - 3.1^2 - 9.1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 11$
- $m = 11$ phương trình $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 luôn thỏa điều kiện $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Vậy $m = 11$ là tham số thực cần tìm .

Ngoài cách giải trên hs có thể lựa chọn phương pháp cấp số cộng thuộc chương trình giải tích lớp 11

Chú ý : Do chương trình mới giảm tải bài điểm uốn của chương trình ban cơ bản , sự giảm tải này đã dẫn đến các bài toán về cấp số cộng , cấp số nhân khá hạn chế trong mỗi đề thi . Nếu xuất hiện bài toán về cấp số thì việc lựa chọn phương pháp giải liên quan điểm uốn đều không chấp nhận. Do đó học sinh cần lưu ý điều này.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$

Điều kiện : $\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$

Phương trình : $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x) \Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x)$ $(*)$

TH1: $0 < x < 1$

Phương trình : $(*) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)(-x+1)\right] = \log_2(4x)$. Hs tự giải

TH2: $x > 1$

Phương trình : $(*) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)(x-1)\right] = \log_2(4x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (l) \\ x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$

2. Giải phương trình: $\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

$\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1+\cos\frac{2x}{3}}{2} = \frac{1-\cos x}{4} \Leftrightarrow 1 + 2 + 2\cos\frac{2x}{3} = 1 - \cos x$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cos 2\left(\frac{x}{3}\right) = -\cos 3\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow 2 + 2\left(2\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 1\right) = -\left(4\cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

$\Leftrightarrow 2 + 4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2 + 4\cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{x}{3}\right)=0\\ \cos\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ \cos\left(\frac{x}{3}\right)=-\frac{3}{2}\quad (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{x}{3}\right)=0\\ \cos\left(\frac{x}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{2}+k3\pi\\ x=\pm\pi+k6\pi.\end{array}\right.$$

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x, \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = BC = BD = DA = 1$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ theo x .Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó. Đây là dạng toán trong sách bài tập hình học 12 .

Học sinh tự vẽ hình

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD

Dễ thấy $V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{BICD},\ V_{AICD} = \frac{1}{3}AI.dt_{ICD},\ V_{BICD} = \frac{1}{3}BI.dt_{ICD}$

Hay : $V_{ABCD} = \frac{1}{3}dt_{ICD}\left(AI + BI\right),\ dt_{ICD} = \frac{1}{2}.IJ.CD$

Dễ dàng chứng minh được IJ là đoạn vuông góc chung của AB, CD

Ta có : $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = 1 - 2x^2, AI = BI = x$

$\Rightarrow dt_{ICD} = \frac{1}{2}.IJ.CD = \frac{1}{2}.\sqrt{1-2x^2}.2x = x.\sqrt{1-2x^2}$ (đvdt).

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}dt_{ICD}\left(AI + BI\right) = \frac{1}{3}x.\sqrt{1-2x^2}\left(x+x\right) = \frac{2x^2}{3}.\sqrt{1-2x^2}$ (đvtt).

$$\frac{2x^2}{3}.\sqrt{1-2x^2} = \frac{2}{3}.\sqrt{x^2.x^2\left(1-2x^2\right)} \le \frac{2}{3}.\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+\left(1-2x^2\right)}{3}\right)^3} = \frac{2}{9\sqrt{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\max V_{ABCD} = \frac{2}{9\sqrt{3}}$ (đvdt) khi $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}+1}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\tan^2 x+2}}dx.$$

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x}dx$..

Đổi cận : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

Do đó $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{u}{\sqrt{u^2+2}} du = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} d\left(\sqrt{u^2+2}\right) = \sqrt{u^2+2}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Học sinh yếu hơn có thể đặt $t = \sqrt{u^2+2} \Rightarrow dt = \frac{u}{\sqrt{u^2+2}} du$.

Câu V: (1 điểm) Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m, m \in R$.

Xét hàm số : $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có : $f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right)$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right)$ ta có $x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4>0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0$.

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$	|	+	0	−	||
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	↗	1	↘	-4

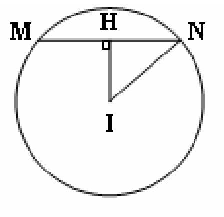
Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{1}{2};1\right] \Leftrightarrow -4 \le m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m = 1$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Ban cơ bản và nâng cao có cùng đáp án.

Câu VI.a (2 điểm)

1. Tìm tham số thực m sao cho đường thẳng $(d): x = 2(y-1) = z+1$ cắt mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho độ dài dây cung $MN = 8$.

$(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0 \Leftrightarrow (S): (x-2)^2+(y-3)^2+z^2 = 13-m$ có tâm $I(2;3;0)$, bán kính $R = IN = \sqrt{13-m}, m<13$



Dựng $IH \perp MN \Rightarrow MH = HN = 4$

$\Rightarrow IH = \sqrt{IN^2 - HN^2} = \sqrt{13-m-16} = \sqrt{-m-3}, m < -3$ và $IH = d_{(I;(d))}$

(d) luôn đi qua $A(0;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(1; \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{1}{2}(2;\ 1;\ 2)$

$\overrightarrow{AI} = (-2;\ 2;\ 1);\ [\overrightarrow{AI};\ \vec{u}] = (3;\ 6;\ -6)$

$$\Rightarrow d_{(I;(d))} = \frac{\left|[\overrightarrow{AI};\ \vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{3^2+6^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

$$IH = d_{(I;(d))} \Leftrightarrow \sqrt{-m-3} = 3 \Leftrightarrow -m-3 = 9 \Leftrightarrow m = -12$$

Vậy $m = -12$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình: $2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng (d) và đi qua hai điểm A, B.

Phương trình đường trung trực của AB là $3x - y - 6 = 0$.

Tọa độ tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow I\left(1;-3\right) \Rightarrow R = IA = 5$

Phương trình đường tròn là $\left(x-1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 25$.

Câu VII.a (1 điểm) Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức:

$C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + ... + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = (n+2).2^{n-1}$.

Ta có : $\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$.

Nhân vào hai vế với $x \in \mathbb{R}$, ta có: $\left(1+x\right)^n x = C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + C_n^3x^4 + ... + C_n^{n-1}x^n + C_n^nx^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + 4C_n^3x^3 + ... + nC_n^{n-1}x^{n-1} + \left(n+1\right)C_n^nx^n$

$= n\left(1+x\right)^{n-1}x + \left(1+x\right)^n = \left(1+x\right)^{n-1}\left(nx+x+1\right)$.

Thay $x = 1$, ta được kết quả : $C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + 4.C_n^3 + ... + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

Một bài toán giải thế này đúng chưa ?

Cho nhị thức $\left(x^3y + \dfrac{y^2}{x}\right)^{95}$, có bao nhiêu số hạng trong dãy mà số mũ của x chia hết số mũ của y .

Cho nhị thức $\left(x^3y + \dfrac{y^2}{x}\right)^{95}$, có bao nhiêu số hạng trong dãy mà số mũ của x chia hết số mũ của y

$$\left(x^3y + \frac{y^2}{x}\right)^{95} = \sum_{i=0}^{95} C_{95}^i \left(x^3y\right)^{95-i}\left(\frac{y^2}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{95} C_{95}^i x^{3.95-4.i}.y^{95+i},\quad 0 \le i \le 95.$$

Số mũ của của x chia hết số mũ của y , khi đó tồn tại số nguyên t sao cho $(t+4)i = 95(3-t)$ $(*)$

- $t = -4$ thì $(*)$ vô nghiệm .
- $t \ne -4$ thì $(*) \Rightarrow i = \dfrac{95(3-t)}{t+4},\quad 0 \le i \le 95 \Rightarrow t = 0,1,2,3$.

\+ $t = 0 \Rightarrow i = \dfrac{95.3}{4}$ loại .

\+ $t = 1 \Rightarrow i = \dfrac{95.2}{5} = 38$ nhận , số hạng cần tìm là $C_{95}^{38}x^{133}.y^{133}$.

\+ $t = 2 \Rightarrow i = \dfrac{95}{6}$ loại .

+ $t = 3 \Rightarrow i = 0$ nhận , số hạng cần tìm là $C_{95}^{0} x^{258}.y^{95}$.
Vậy có hai số hạng thỏa mãn bài toán : $C_{95}^{0} x^{258}.y^{95}$ và $C_{95}^{38} x^{133}.y^{133}$.