

**ĐỀ 01**

**I. PHẦN BẮT BUỘC ( 7,0 điểm )**

**Câu I :** ( 2 điểm ) Cho hàm số :  $y = \frac{x+3}{x-1}$ , có đồ thị là  $(C)$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số.

2. Cho điểm  $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M_0$  cắt các đường tiệm cận của  $(C)$  tại các điểm  $A, B$ . Chứng minh  $M_0$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

**Câu II :** ( 2 điểm )

1. Giải phương trình :  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

2. Giải phương trình :  $\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}$

**Câu III :** ( 1 điểm ) Tính tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

**Câu IV :** ( 1 điểm ) Cho tứ diện  $OABC$  có đáy  $OBC$  là tam giác vuông tại  $O, OB = a, OC = \sqrt{3}, (a > 0)$ . và đường cao  $OA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB, OM$ .

**Câu V :** ( 1 điểm ) Cho 3 số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức  $P = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \frac{2\sqrt{y}}{1+y} + \frac{z-1}{z+1}$

**II. PHẦN TỰ CHỌN ( 3,0 điểm ) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần ( phần 1 hoặc 2 ).**

**1. Theo chương trình Chuẩn :**

**Câu VI.a** ( 2 điểm ) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$

1. Cho 4 điểm  $A(1;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;2), D(2;-1;1)$ . Tìm vector  $\overrightarrow{A'B'}$  là hình chiếu của vector  $\overrightarrow{AB}$  lên  $CD$ .

2. Cho đường thẳng  $(d) : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  và mặt phẳng  $(P) : x - y + z - 5 = 0$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $(t)$  đi qua  $A(3;-1;1)$  nằm trong  $(P)$  và hợp với  $(d)$  một góc  $45^\circ$ .

**Câu VII.a** ( 1 điểm ) Một giỏ đựng 20 quả cầu. Trong đó có 15 quả màu xanh và 5 quả màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu trong giỏ. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu cùng màu ?

**2. Theo chương trình Nâng cao :**

**Câu VI.b** ( 2 điểm ) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$

1. Cho 3 điểm  $A(0;1;0), B(2;2;2)$  và đường thẳng  $(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ . Tìm điểm  $M \in (d)$  để diện tích tam giác  $ABM$  nhỏ nhất.

2. Cho hai đường thẳng  $(d) : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$  và  $(d') : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$ . Chứng minh  $(d)$  vuông góc với  $(d')$ , viết phương trình đường vuông góc chung của  $(d)$  và  $(d')$ .

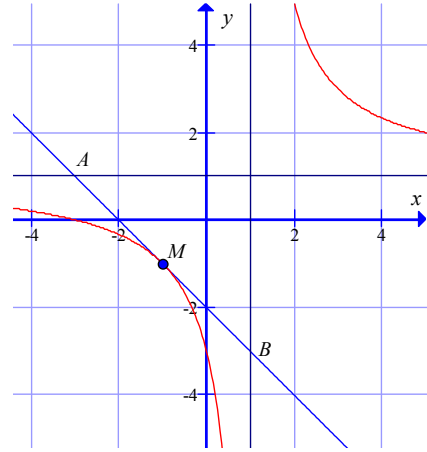
**Câu VII.b** ( 1 điểm ) Cho khai triển  $\left( 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5} \log_2 (3^{x-1}+1)} \right)^8$ . Hãy tìm các giá trị của  $x$  biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224.

.....Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm .....

## I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH ( 7,0 điểm )

Câu I : ( 2 điểm ) Cho hàm số :  $y = \frac{x+3}{x-1}$ , có đồ thị là  $(C)$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số.
2. Cho điểm  $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M_0$  cắt các đường tiệm cận của  $(C)$  tại các điểm  $A, B$ . Chứng minh  $M_0$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .



Câu II: ( 2 điểm )

1. Giải phương trình :  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

Điều kiện :  $-2 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-2) \left( \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 4\sqrt{2(2+x)(2-x)} + (2-x)(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2-x}(4\sqrt{2(2+x)} + (x+4)\sqrt{2-x}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

2. Giải phương trình :  $\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}$

Điều kiện :  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

Ta có :  $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$

Phương trình :  $\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi & (\text{không thỏa}) \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}. \text{ Vậy phương trình cho có họ nghiệm là } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

Câu III: ( 1 điểm ) Tính tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

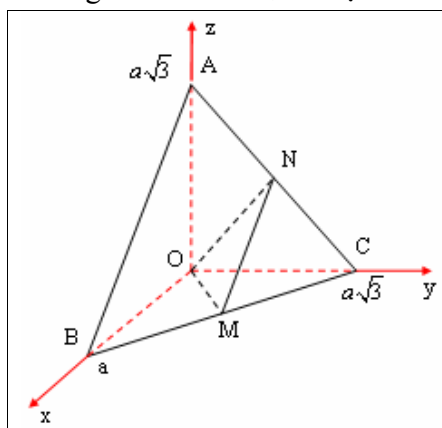
$$I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{1 + (x+1)^2}$$

Đặt  $x + 1 = \tan t$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (\tan^2 t + 1)dt$

Đổi cận :  $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ .

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t + 1}{1 + \tan^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Câu IV: ( 1 điểm ) Cho tứ diện  $OABC$  có đáy  $OBC$  là tam giác vuông tại  $O$ ,  $OB = a, OC = \sqrt{3}$ , ( $a > 0$ ). và đường cao  $OA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB, OM$ .



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó  $O(0;0;0)$ ,

$$A(0;0;a\sqrt{3}), B(a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right),$$

$$\text{gọi } N \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

$MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC \Rightarrow AB \parallel MN$   
 $\Rightarrow AB \parallel (OMN) \Rightarrow d(AB; OM) = d(AB; (OMN)) = d(B; (OMN)).$

$$\overline{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \overline{ON} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$[\overline{OM}; \overline{ON}] = \left(\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}; 1; 1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n}, \text{ với}$$

$$\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 1).$$

Phương trình mặt phẳng  $(OMN)$  qua  $O$  với vector pháp tuyến  $\vec{n}$ :  $\sqrt{3}x + y + z = 0$

$$\text{Ta có: } d(B; (OMN)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot a + 0 + 0|}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \text{ Vậy,}$$

$$d(AB; OM) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu V: ( 1 điểm ) Cho 3 số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \frac{2\sqrt{y}}{1+y} + \frac{z-1}{z+1}$$

Ta có :  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{x} = 1$  . Điều này gợi ý ta đưa đến hướng

giải lượng giác . Đặt  $\sqrt{x} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{y} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{z} = \tan \frac{C}{2}$

Nếu  $A, B, C \in (0; \pi), A + B + C = \pi$  thì  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$ .

Khi đó  $P = \sin A + \sin B - \cos C = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos^2 \frac{C}{2} + 1$

$$P = -2 \left( \cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{3}{2} \text{ khi } \begin{cases} C = \frac{2\pi}{3} \\ A = B = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ z = 3 \end{cases}$$

## II. PHẦN RIÊNG ( 3,0 điểm )

**Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần ( phần 1 hoặc 2 ).**

1. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b ( 2 điểm )

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho  $A(0;1;0), B(2;2;2), C(-2;3;1)$  và đường thẳng

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} . \text{ Tìm điểm } M \in (d) \text{ để diện tích tam giác } ABN \text{ nhỏ nhất.}$$

$$M \in (d) \Rightarrow M(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t).$$

$$\overline{AB} = (2; 1; 2), \overline{AC} = (-2; 2; 1) \Rightarrow [\overline{AB}; \overline{AC}] = (-3; -6; 6) = -3(1; 2; -2) = -3 \cdot \vec{n}, \vec{n} = (1; 2; -2)$$

Mặt phẳng  $(ABC)$  qua  $A(0;1;0)$  và có vecto pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 2; -2)$  nên có phương trình  $x + 2y - 2z - 2 = 0$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}; \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2} = \frac{9}{2}, \quad MH = d(M(ABC)) = \frac{|1 + 2(-2 - t) - 2(3 + 2t) - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|-4t - 11|}{3}$$

$$V_{MABC} = 3 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{|4t + 11|}{3} = 3 \Leftrightarrow |4t + 11| = 6 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{4} \text{ hay } t = -\frac{17}{4}.$$

Vậy  $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$  hay  $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$  là tọa độ cần tìm.

2. Cho hai đường thẳng  $(d) : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$  và  $(d') : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$  . Chứng minh  $(d)$  vuông góc với  $(d')$  , viết phương trình đường vuông góc chung của  $(d)$  và  $(d')$  .

Câu VII.b ( 1 điểm ) Cho khai triển  $\left( 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5} \log_2 (3^{x-1}+1)} \right)^8$  . Hãy tìm các giá trị của  $x$  biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224 .

$$\text{Ta có : } (a + b)^8 = \sum_{k=0}^{k=8} C_8^k a^{8-k} b^k \text{ với } a = 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} = (9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}} ; b = 2^{-\frac{1}{5} \log_2 (3^{x-1}+1)} = (3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}}$$

+ Theo thứ tự trong khai triển trên , số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là

$$T_6 = C_8^5 \left( (9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \cdot \left( (3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}} \right)^5 = 56 (9^{x-1} + 7) \cdot (3^{x-1} + 1)^{-1}$$

+ Theo giả thiết ta có :  $56(9^{x-1} + 7) \cdot (3^{x-1} + 1)^{-1} = 224 \Leftrightarrow \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 4 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$

$$\Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4(3^{x-1}) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$