Bộ Giáo Dục và Đào tạo
ĐỀ THAM KHẢO
Email: phukhanh@moet.edu.vn

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2010
Môn thi : TOÁN - khối A.
Ngày thi : ***28.02.2010 (Chủ Nhật)***

ĐỀ 01

I. PHẦN BẮT BUỘC (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = \dfrac{x+3}{x-1}$, có đồ thị là $\left(C\right)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số .

2. Cho điểm $M_0\left(x_0;y_0\right) \in \left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M_0 cắt các đường tiệm cận của $\left(C\right)$ tại các điểm A, B. Chứng minh M_0 là trung điểm của đoạn AB .

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình : $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

2. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)} = -\dfrac{1}{8}$

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại $O, OB = a,\quad OC = \sqrt{3},\ \left(a > 0\right)$. và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, OM .

Câu V: (1 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{1}{\sqrt{xyz}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} + \dfrac{2\sqrt{y}}{1+y} + \dfrac{z-1}{z+1}$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3,0 điểm) *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).*

1. Theo chương trình Chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$

1. Cho 4 điểm $A\left(1;0;0\right), B\left(0;-1;0\right), C\left(0;0;2\right), D\left(2;-1;1\right)$. Tìm vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ lên CD .

2. Cho đường thẳng : $\left(d\right) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $\left(P\right) : x - y + z - 5 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng $\left(t\right)$ đi qua $A\left(3;-1;1\right)$ nằm trong $\left(P\right)$ và hợp với $\left(d\right)$ một góc 45^0.

Câu VII.a(1 điểm) Một giỏ đựng 20 quả cầu. Trong đó có 15 quả màu xanh và 5 quả màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu trong giỏ.Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu cùng màu ?

2. Theo chương trình Nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$

1. Cho 3 điểm $A\left(0;1;0\right), B\left(2;2;2\right)$ và đường thẳng $\left(d\right) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Tìm điểm $M \in \left(d\right)$ để diện tích tam giác ABM nhỏ nhất.

2. Cho hai đường thẳng $\left(d\right) : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ và $\left(d'\right) : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-2}$. Chứng minh $\left(d\right)$ vuông góc với $\left(d'\right)$, viết phương trình đường vuông góc chung của $\left(d\right)$ và $\left(d'\right)$.

Câu VII.b (1 điểm) Cho khai triển $\left(2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224.

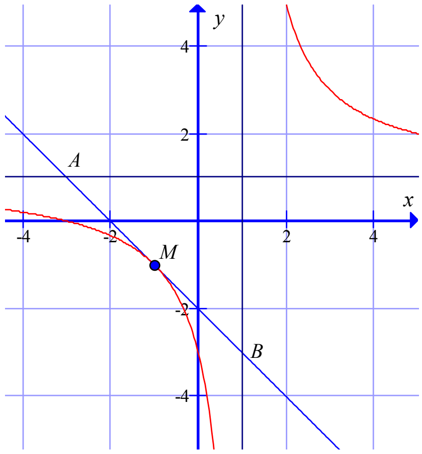
....Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm ....

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = \dfrac{x+3}{x-1}$, có đồ thị là (C) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .

2. Cho điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các đường tiệm cận của (C) tại các điểm A, B. Chứng minh M_0 là trung điểm của đoạn AB .



Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình : $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

Điều kiện : $-2 \le x \le 2$

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ 4\sqrt{2(2+x)(2-x)} + (2-x)(x+4) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ \sqrt{2-x}(4\sqrt{2(2+x)} + (x+4)\sqrt{2-x}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$$

2. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = -\dfrac{1}{8}$

Điều kiện : $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \ne 0$

Ta có : $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = -1$

Phương trình : $\dfrac{\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = -\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \dfrac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{không} \ \ thoa) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$. Vậy phương trình cho có họ nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

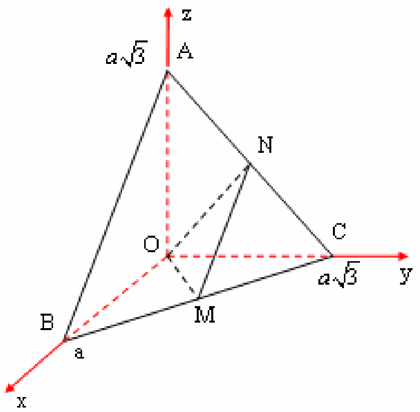
$$I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{1 + (x+1)^2}$$

Đặt $x + 1 = \tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (\tan^2 x + 1)dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4},\ x = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t + 1}{1 + \tan^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Câu IV: (1 điểm) Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB = a, OC = \sqrt{3},\ (a > 0)$. và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, OM.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $O(0;0;0)$,

$A(0;0;a\sqrt{3}),\ B(a;0;0),\ C(0;a\sqrt{3};0),\ M\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,

gọi N là trung điểm của $AC \Rightarrow N\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow AB \,//\, MN$

$\Rightarrow AB \,//(OMN) \Rightarrow d(AB;OM) = d(AB;(OMN)) = d(B;(OMN))$.

$\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ \overrightarrow{ON} = \left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}] = \left(\dfrac{3a^2}{4}; \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}; 1; 1\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n}$, với

$\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (OMN) qua O với vectơ pháp tuyến $\vec{n}: \sqrt{3}x + y + z = 0$

Ta có: $d(B; (OMN)) = \dfrac{\left|\sqrt{3}.a + 0 + 0\right|}{\sqrt{3+1+1}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy, $d(AB; OM) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu V: (1 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{1}{\sqrt{xyz}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} + \dfrac{2\sqrt{y}}{1+y} + \dfrac{z-1}{z+1}$

Ta có : $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{xyz}} \Leftrightarrow \sqrt{x}.\sqrt{y}+\sqrt{y}.\sqrt{z}+\sqrt{z}.\sqrt{x}=1$. Điều này gợi ý ta đưa đến hướng giải lượng giác . Đặt $\sqrt{x}=\tan\frac{A}{2},\sqrt{y}=\tan\frac{B}{2},\sqrt{z}=\tan\frac{C}{2}$

Nếu $A,B,C\in(0;\pi), A+B+C=\pi$ thì $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

Khi đó $P=\sin A+\sin B-\cos C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}+1$

$P=-2(\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2})^2+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\le\frac{3}{2}$

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases}C=\frac{2\pi}{3}\\ A=B=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=\tan^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\ z=3\end{cases}$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).

1. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;1;0), B(2;2;2), C(-2;3;1)$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2-t\\ z=3+2t\end{cases}$. Tìm điểm $M\in(d)$ để diện tích tam giác ABN nhỏ nhất.

$M\in(d)\ \Rightarrow M(1+2t;\,-2-t;\,3+2t).$

$\overrightarrow{AB}=(2;\,1;\,2),\ \overrightarrow{AC}=(-2;\,2;1)\Rightarrow[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]=(-3;\,-6;\,6)=-3(1;\,2;\,-2)=-3.\vec{n},\vec{n}=(1;\,2;\,-2)$

Mặt phẳng (ABC) qua $A(0;1;0)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(1;\,2;\,-2)$ nên có phương trình $x+2y-2z-2=0$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=\frac{9}{2},\ MH=d(M(ABC))=\frac{|1+2t+2(-2-t)-2(3+2t)-2|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|-4t-11|}{3}$

$V_{MABC}=3\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{9}{2}.\frac{|4t+11|}{3}=3\Leftrightarrow|4t+11|=6\Leftrightarrow\ t=-\frac{5}{4}$ hay $t=-\frac{17}{4}.$

Vậy $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$ hay $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\ \frac{11}{2}\right)$ là tọa độ cần tìm.

2. Cho hai đường thẳng $(d):\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$ và $(d'):\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$. Chứng minh (d) vuông góc với (d') , viết phương trình đường vuông góc chung của (d) và (d').

Câu VII.b (1 điểm) Cho khai triển $\left(2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224.

Ta có : $(a+b)^8=\sum_{k=0}^{k=8}C_8^k a^{8-k}b^k$ với $a=2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}=\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}$; $b=2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}=\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}$

+ Theo thứ tự trong khai triển trên , số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là

$$T_6=C_8^5\left(\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3.\left(\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^5=56\left(9^{x-1}+7\right).\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}$$

+ Theo giả thiết ta có : $56\left(9^{x-1}+7\right).\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}=224 \Leftrightarrow \dfrac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}=4 \Leftrightarrow 9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$

$$\Leftrightarrow \left(3^{x-1}\right)^{2}-4(3^{x-1})+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x-1}=1 \\ 3^{x-1}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$